

ESAMI DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
SCUOLE ITALIANE ALL'ESTERO: EUROPA
CORSO DI ORDINAMENTO
Indirizzo: SCIENTIFICO
Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e 4 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Nel piano cartesiano Oxy è data la circonferenza C di equazione $x^2 + y^2 = 25$.

- Si scrivano le equazioni delle tangenti a C nei suoi punti di ordinata $y = 3$
- Si tracci una corda \overline{MN} perpendicolare al diametro \overline{AB} con $A(0,-5)$ e $B(0,5)$. Si trovino le coordinate dei punti M ed N di C in modo che l'area del triangolo AMN sia massima.
- Con l'aiuto di una calcolatrice, si calcoli la lunghezza dell'arco tra i punti $P(5,0)$ e $Q(4,3)$ di C .
- Il settore circolare POQ è la base di un solido W che tagliato con piani perpendicolari all'asse x dà tutte sezioni quadrate. Si calcoli il volume di W .

PROBLEMA 2

Nel piano riferito a un sistema Oxy di coordinate cartesiane siano assegnate le parabole di equazioni: $y^2 = 2ax$ e $x^2 = ay$, con $a > 0$:

- Si disegnino le due parabole e si denoti con A il loro punto di intersezione diverso dall'origine O .
- Sia B la proiezione ortogonale di A sull'asse x . Si dica se il segmento OB risolve il problema della duplicazione del cubo di spigolo a . Posto $a=2$ e non disponendo di una calcolatrice come si può procedere per avere l'approssimazione di $\sqrt[3]{2}$ a meno di 10^{-1} ?
- Sia D la parte di piano delimitata dagli archi delle due parabole di estremi O e A . Si determini l'area di D .
- Si calcoli il volume del solido generato da D in una rotazione completa attorno all'asse y .

QUESTIONARIO

1) Un tetraedro regolare e un cubo hanno superfici equivalenti. Calcolare il rapporto dei rispettivi spigoli.

2) Si dimostri che l'equazione:

$$x^{11} + 11x + 5 = 0$$

ha una sola radice compresa fra -1 e 0 .

3) Si determini il campo di esistenza della funzione:

$$f : x \rightarrow \ln(-2x^2 + 4x + 6)$$

4) Qual è il periodo della funzione $y = \cos(3x + 1)$? Si dia ragione della risposta.

5) Si sa che una grandezza fisica y dipende da un'altra x secondo una legge $y = k \cdot x^\alpha$ dove k e α sono costanti incognite. Una misura simultanea di x e y , eseguita in due diverse situazioni, ha dato i risultati riportati nella tabella seguente:

x	2	3
y	6,4	14,4

Si calcolino k e α .

6) Si calcoli:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

7) Dati due punti A e B distanti tra loro 4 dm, si dica qual è il luogo dei punti C dello spazio tali che il triangolo ABC sia rettangolo in A ed abbia area uguale a 2 cm^2 ?

8) Si determini il cilindro di massimo volume inscrivibile in una sfera di 60 cm di raggio. Qual è la capacità di tale cilindro, espressa in litri?

Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

PROBLEMA1

Nel piano cartesiano Oxy è data la circonferenza C di equazione $x^2 + y^2 = 25$.

Punto a

Si scrivano le equazioni delle tangenti a C nei suoi punti di ordinata $y = 3$

I punti di intersezione tra la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 25$ e la retta $y = 3$ si ricavano dal

$$\text{sistema } \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ y = 3 \end{cases} \text{ da cui } \begin{cases} x^2 = 16 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q(4,3) \\ R(-4,3) \end{cases}.$$

Nel primo e secondo quadrante, cioè nel semipiano $y > 0$, la semicirconferenza è in forma esplicita

rappresentata dalla curva $y = \sqrt{25 - x^2}$, la cui derivata è $y' = \frac{-x}{\sqrt{25 - x^2}}$.

Calcoliamo le tangenti:

1. La tangente in $Q(4,3)$ ha equazione $y = m(x - 4) + 3$ con $m = \left[\frac{-x}{\sqrt{25 - x^2}} \right]_{x=4} = -\frac{4}{3}$ da cui

$$t_Q; y = -\frac{4}{3}x + \frac{25}{3};$$

2. La tangente in $R(-4,3)$ ha equazione $y = m(x + 4) + 3$ con $m = \left[\frac{-x}{\sqrt{25 - x^2}} \right]_{x=-4} = \frac{4}{3}$ da cui

$$t_R; y = \frac{4}{3}x + \frac{25}{3}.$$

Analogamente si può procedere nella maniera classica in cui si mette a sistema l'equazione della circonferenza e la generica retta tangente e poi si impone che il delta dell'equazione risultante sia nullo.

Per la tangente in $Q(4,3)$ si ha:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ y = mx - 4m + 3 \end{cases} \Rightarrow x^2 + (mx - 4m + 3)^2 = 25 \Rightarrow (1 + m^2)x^2 - 2x(4m^2 - 3m) + 8(2m^2 - 3m - 2) = 0$$

Imponendo $\frac{\Delta}{4} = 0$ si ha $(4m^2 - 3m)^2 - 8(m^2 + 1)(2m^2 - 3m - 2) = (3m + 4)^2 = 0 \Rightarrow m = -\frac{4}{3}$ da cui

$$t_Q; y = -\frac{4}{3}x + \frac{25}{3}.$$

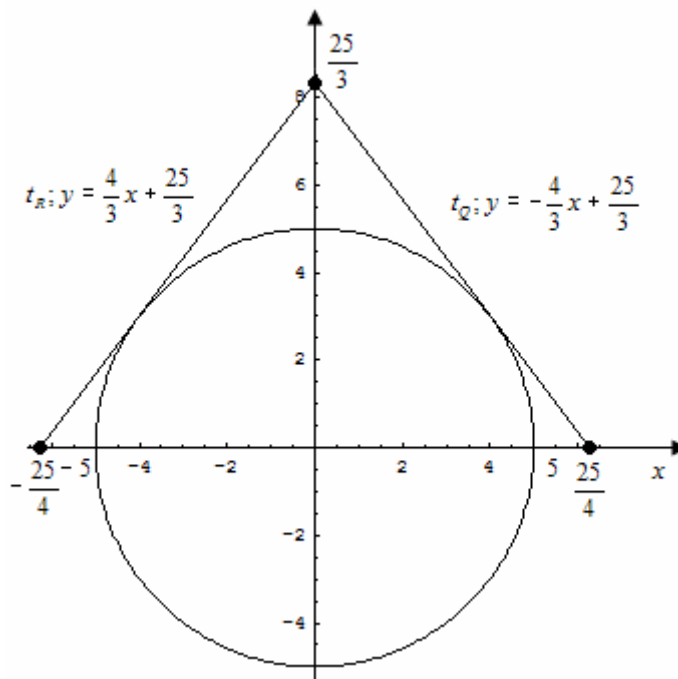
Per la tangente in $R(-4,3)$ si ha:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ y = mx + 4m + 3 \end{cases} \Rightarrow x^2 + (mx + 4m + 3)^2 = 25 \Rightarrow (1 + m^2)x^2 - 2x(4m^2 + 3m) + 8(2m^2 + 3m - 2) = 0$$

Imponendo $\frac{\Delta}{4} = 0$ si ha $(4m^2 + 3m)^2 - 8(m^2 + 1)(2m^2 + 3m - 2) = (3m - 4)^2 = 0 \Rightarrow m = \frac{4}{3}$ da cui

$$t_R: y = \frac{4}{3}x + \frac{25}{3}$$

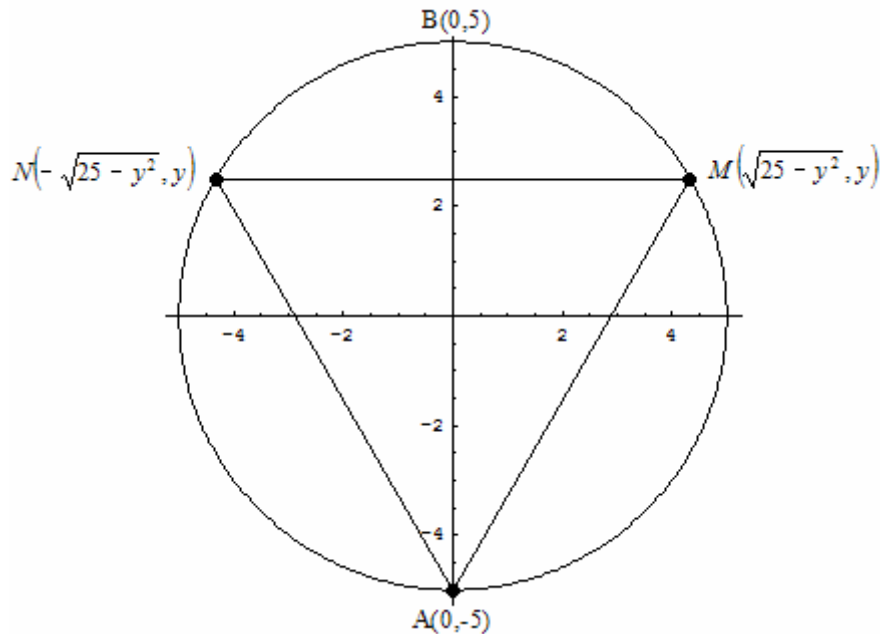
Di seguito la circonferenza con le tangenti suddette.



Punto b

Si tracci una corda \overline{MN} perpendicolare al diametro \overline{AB} con $A(0,-5)$ e $B(0,5)$. Si trovino le coordinate dei punti M ed N di C in modo che l'area del triangolo AMN sia massima.

Innanzitutto facciamo la seguente considerazione. Il triangolo AMN è isoscele su base MN per simmetria ed inoltre ha il vertice sull'asse negativo delle ordinate. Il triangolo di area massima dovrà avere la base MN nel primo e secondo quadrante in quanto se la base fosse nel secondo e quarto quadrante il triangolo non avrebbe area massima in quanto esisterebbe il triangolo rettangolo isoscele di base il diametro ed altezza pari al raggio con area maggiore di quella del triangolo AMN . Quindi i punti M ed N si troveranno rispettivamente nel primo e secondo quadrante ed avranno coordinate $M(\sqrt{25 - y^2}, y), N(-\sqrt{25 - y^2}, y)$ con $0 < y < 5$. La figura seguente mostra la geometria del problema:



Il triangolo AMN per simmetria è isoscele su base $\overline{MN} = 2\sqrt{25 - y^2}$ ed altezza $(y + 5)$. L'area è allora $S(y) = (y + 5) \cdot \sqrt{25 - y^2} = \sqrt{(y + 5)^2(25 - y^2)} = \sqrt{(y + 5)^3(5 - y)}$ in cui il fattore $(y + 5)$ è stato portato sotto radice in quanto $0 < y < 5$. La massimizzazione di $S(y) = \sqrt{(y + 5)^3(5 - y)}$ equivale alla massimizzazione di $g(y) = S^2(y) = (y + 5)^3(5 - y)$ la cui derivata prima è $g'(y) = 3(y + 5)^2(5 - y) - (y + 5)^3 = (y + 5)^2(10 - 4y)$ per cui $g'(y) = (y + 5)^2(10 - 4y) > 0 \Rightarrow 0 < y < \frac{5}{2}$ e $g'(y) = (y + 5)^2(10 - 4y) < 0 \Rightarrow \frac{5}{2} < y < 5$; da queste considerazioni deduciamo che la funzione area è strettamente crescente in $\left(0, \frac{5}{2}\right)$ e strettamente decrescente in $\left(\frac{5}{2}, 5\right)$, quindi l'area massima si ha per $y = \frac{5}{2}$ e vale $S\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{75\sqrt{3}}{4}$ cui corrispondono $M\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2}\right), N\left(-\frac{5\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2}\right)$. In questo caso notiamo che $\overline{MN} = \overline{MA} = \overline{MB} = 5\sqrt{3}$, cioè il triangolo di area massima è un triangolo equilatero.

Punto c

Con l'aiuto di una calcolatrice, si calcoli la lunghezza dell'arco tra i punti P(5,0) e Q(4,3) di C.

L'arco tra i punti P(5,0) e Q(4,3) di C è un arco circolare di raggio $r=5$ ed apertura

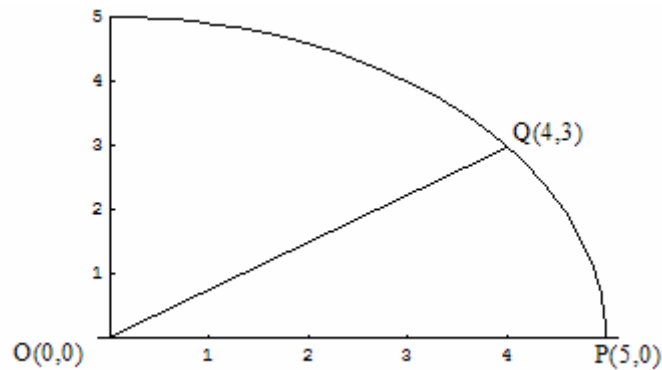
$\alpha = \arcsin\left(\frac{3}{5}\right)$ per cui la lunghezza dell'arco, con $\alpha = \arcsin\left(\frac{3}{5}\right)$ espresso in radianti, è

$$l = r \cdot \alpha = 5 \cdot \arcsin\left(\frac{3}{5}\right) \cong 3.22 [\text{m}] \cdot [\text{rad}]$$

Punto d

Il settore circolare POQ è la base di un solido W che tagliato con piani perpendicolari all'asse x dà tutte sezioni quadrate. Si calcoli il volume di W.

Consideriamo la figura seguente:



La retta OQ ha equazione $y = \frac{3}{4}x$ per cui il lato del quadrato sezione è

$$L(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}x & \text{se } 0 \leq x \leq 4 \\ \sqrt{25-x^2} & \text{se } 4 \leq x \leq 5 \end{cases} \quad \text{cui corrisponde l'area del quadrato}$$

$$A(x) = L^2(x) = \begin{cases} \frac{9}{16}x^2 & \text{se } 0 \leq x \leq 4 \\ 25-x^2 & \text{se } 4 \leq x \leq 5 \end{cases} \quad \text{Integrando tale area otteniamo il volume richiesto}$$

$$V = \int_0^5 A(x) dx = \int_0^4 \left(\frac{9}{16}x^2\right) dx + \int_4^5 (25-x^2) dx =$$

$$= \left[\frac{9}{48}x^3\right]_0^4 + \left[25x - \frac{x^3}{3}\right]_4^5 = 12 + \left[\left(125 - \frac{125}{3}\right) - \left(100 - \frac{64}{3}\right)\right] = 12 + \frac{14}{3} = \frac{50}{3}$$

PROBLEMA2

Nel piano riferito a un sistema Oxy di coordinate cartesiane siano assegnate le parabole di equazioni: $y^2 = 2ax$ e $x^2 = ay$, con $a > 0$:

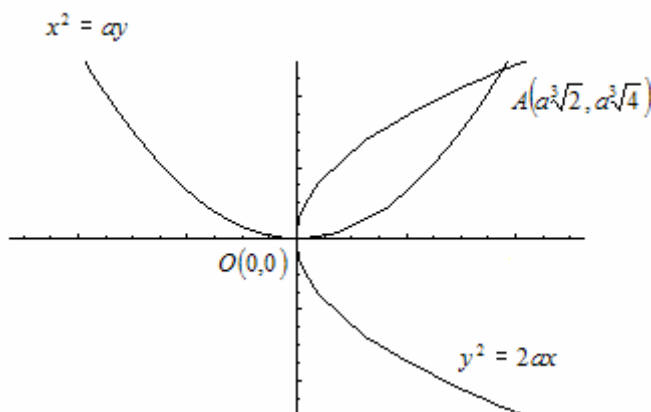
Punto a

Si disegnino le due parabole e si denoti con A il loro punto di intersezione diverso dall'origine O .

La parabola di equazione $y^2 = 2ax$ ha asse coincidente con l'asse delle ascisse e vertice in $(0,0)$; la parabola di equazione $x^2 = ay$ ha asse coincidente con l'asse delle ordinate e vertice in $(0,0)$. Le

intersezioni si ricavano dal sistema $\begin{cases} y^2 = 2ax \\ x^2 = ay \end{cases}$ da cui

$$\begin{cases} x(x^3 - 2a^3) = 0 \\ y = \frac{x^2}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^4 - 2a^3x = 0 \\ y = \frac{x^2}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} O(0,0) \\ A(a\sqrt[3]{2}, a\sqrt[3]{4}) \end{cases}$$



Punto b

Sia B la proiezione ortogonale di A sull'asse x . Si dica se il segmento OB risolve il problema della duplicazione del cubo di spigolo a . Posto $a=2$ e non disponendo di una calcolatrice come si può procedere per avere l'approssimazione di $\sqrt[3]{2}$ a meno di 10^{-1} ?

Il punto B ha coordinate $B(a\sqrt[3]{2}, 0)$ per cui $\overline{OB} = a\sqrt[3]{2}$.

Il problema della duplicazione del cubo consiste nella la costruzione di un cubo avente volume doppio rispetto a quello di un cubo di spigolo dato. Nel caso in esame lo spigolo dato misura a ed il volume del cubo corrispondente è $V = a^3$ mentre il cubo di spigolo $\overline{OB} = a\sqrt[3]{2}$ ha volume $V_1 = (a\sqrt[3]{2})^3 = 2a^3$ che è il doppio del volume V . Quindi il segmento OB risolve il problema della duplicazione del cubo di spigolo a .

Per avere l'approssimazione di $\sqrt[3]{2}$ notiamo che $\sqrt[3]{2}$ è l'unica soluzione dell'equazione $x^3 - 2 = 0$ cioè è l'unico zero della funzione $h(x) = x^3 - 2$. Infatti la funzione $h(x) = x^3 - 2$ assume valori discordi agli estremi dell'intervallo $[1,2]$ dal momento che $h(1) = -1 < 0, h(2) = 6 > 0$ per cui a norma del teorema degli zeri tale zero si trova in $(1,2)$ ed inoltre $h(x) = x^3 - 2$ è strettamente crescente in \mathbb{R} per cui lo zero è unico. Appliciamo il metodo delle tangenti o di Newton di punto iniziale $x_0 = 2$ con la formula ricorsiva $x_{n+1} = x_n - \frac{h(x_n)}{h'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 - 2}{3x_n^2} = \frac{2x_n^3 + 2}{3x_n^2}$. Sviluppando

tale metodo si ha:

1) $x_0 = 2$

2) $x_1 = \frac{2x_0^3 + 2}{3x_0^2} = \frac{3}{2}$

3) $x_2 = \frac{2x_1^3 + 2}{3x_1^2} \cong 1.30$

4) $x_3 = \frac{2x_2^3 + 2}{3x_2^2} \cong 1.26$

Poiché $|x_3 - x_2| = 0.04 < 0.1$ allora una soluzione a meno di 10^{-1} è $\alpha \cong 1.3$.

Punto c

Sia D la parte di piano delimitata dagli archi delle due parabole di estremi O e A. Si determini l'area di D.

La parabola di equazione $y^2 = 2ax$ nel primo quadrante è rappresentata dall'equazione $y = \sqrt{2ax}$

per cui l'area della regione D è $S = \int_0^{a\sqrt{2}} \left(\sqrt{2ax} - \frac{x^2}{a} \right) dx = \left[\frac{2\sqrt{2a}}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3a} \right]_0^{a\sqrt{2}} = \frac{4a^2}{3} - \frac{2a^2}{3} = \frac{2a^2}{3}$.

Analogamente possiamo calcolare l'integrale nel modo seguente:

$$S = \int_0^{a\sqrt[3]{4}} \left(\sqrt{ay} - \frac{y^2}{2a} \right) dy = \left[\frac{2\sqrt{a}y^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{y^3}{6a} \right]_0^{a\sqrt[3]{4}} = \frac{4a^2}{3} - \frac{2a^2}{3} = \frac{2a^2}{3}$$

Punto d

Si calcoli il volume del solido generato da D in una rotazione completa attorno all'asse y.

Il volume richiesto è dato dalla differenza del volume generato dalla rotazione intorno all'asse y di

$x = \sqrt{ay}$ ed il volume generato dalla rotazione intorno all'asse y di $x = \frac{y^2}{2a}$, cioè è pari a:

$$V = \pi \left[\int_0^{a^{\frac{3}{4}}} (\sqrt{ay})^2 dy - \int_0^{a^{\frac{3}{4}}} \left(\frac{y^2}{2a} \right)^2 dy \right] = \pi \left[\int_0^{a^{\frac{3}{4}}} ay dy - \int_0^{a^{\frac{3}{4}}} \frac{y^4}{4a^2} dy \right] =$$

$$= \pi \left[\frac{ay^2}{2} \right]_0^{a^{\frac{3}{4}}} - \pi \left[\frac{y^5}{20a^2} \right]_0^{a^{\frac{3}{4}}} = \pi a^3 \sqrt[3]{2} - \pi a^3 \frac{2\sqrt[3]{2}}{5} = \frac{3\sqrt[3]{2}}{5} \pi a^3$$

QUESTIONARIO

Quesito 1

Un tetraedro regolare e un cubo hanno superfici equivalenti. Calcolare il rapporto dei rispettivi spigoli.

Un cubo di spigolo a ha superficie totale pari a $S_C = 6a^2$, mentre quella di un tetraedro di spigolo l è $S_T = l^2 \sqrt{3}$. Imponendo $S_C = S_T$ si ricava $6a^2 = l^2 \sqrt{3} \Rightarrow l = a \sqrt[4]{12}$ per cui il rapporto tra gli spigoli è $\frac{l}{a} = \sqrt[4]{12}$.

Quesito 2

Si dimostri che l'equazione:

$$x^{11} + 11x + 5 = 0$$

ha una sola radice compresa fra -1 e 0.

La funzione $f(x) = x^{11} + 11x + 5$ è un polinomio di grado dispari, che ha quindi almeno una soluzione reale. Si può osservare anche che è una funzione continua e derivabile per ogni x reale. Dunque possiamo dimostrare facilmente, attraverso lo studio del segno della derivata prima $f'(x) = 11x^{10} + 11$, che essa è strettamente crescente, e dunque iniettiva, per cui l'equazione data ha un'unica soluzione reale. Si osserva poi che $f(-1) = -7 < 0$, $f(0) = 5 > 0$ per cui per il teorema degli zeri la funzione presenta un unico zero in $(-1, 0)$.

Quesito 3

Si determini il campo di esistenza della funzione:

$$f : x \rightarrow \ln(-2x^2 + 4x + 6)$$

Il dominio è dato dalle soluzioni della disequazione $(-2x^2 + 4x + 6) > 0$, cioè $(x^2 - 2x - 3) = (x - 3)(x + 1) < 0$, quindi $x \in (-1, 3)$.

Quesito 4

Qual è il periodo della funzione $y = \cos(3x + 1)$? Si dia ragione della risposta.

Una funzione è periodica di periodo T se $f(x) = f(x + kT)$ con $k \in \mathbb{Z}$. Nel caso in esame, ricordando che il coseno è periodico di 2π , deve aversi

$\cos(3x+1) = \cos(3x+1+2h\pi) = \cos(3x+1+3kT)$ e cioè $3x+1+2h\pi = 3x+1+3kT$. Per $h = k$ si ricava $T = \frac{2\pi}{3}$.

Quesito 5

Si sa che una grandezza fisica y dipende da un'altra x secondo una legge $y = k \cdot x^\alpha$ dove k e α sono costanti incognite. Una misura simultanea di x e y , eseguita in due diverse situazioni, ha dato i risultati riportati nella tabella seguente:

x	2	3
y	6,4	14,4

Si calcolino k e α .

Si ha $\begin{cases} k \cdot 2^\alpha = 6,4 \\ k \cdot 3^\alpha = 14,4 \end{cases}$. Dal rapporto tra le due equazioni del sistema si ricava $\left(\frac{2}{3}\right)^\alpha = \frac{4}{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$ da

cui $\alpha = 2$ e sostituendo in una delle due equazioni del sistema, ad esempio la prima, si ricava

$$k = \frac{6,4}{2^\alpha} = \frac{6,4}{4} = 1,6.$$

Quesito 6

Si calcoli:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

Moltiplicando numeratore e denominatore per $(1 + \cos x)$ si ha:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}_{=1} \cdot \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(1 + \cos x)}}_{=\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

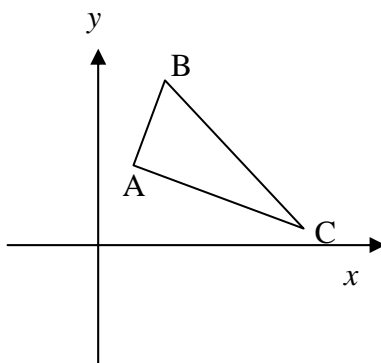
è sfruttato il limite notevole $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right) = 1$. Applicando il teorema di de l'Hospital si giunge al

$$\text{medesimo risultato: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{=1} = \frac{1}{2}.$$

Quesito 7

Dati due punti A e B distanti tra loro 4 dm, si dica qual è il luogo dei punti C dello spazio tali che il triangolo ABC sia rettangolo in A ed abbia area uguale a 2 cm^2 ?

Consideriamo la figura seguente

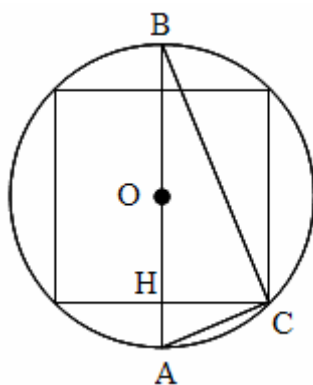


Ragioniamo in centimetri come unità di misura. In questo modo $\overline{AB} = 40 \text{ cm}$, e dovendo essere l'area pari a 2 cm^2 , il cateto AC misura $\overline{AC} = \frac{1}{10} \text{ cm}$. Affinché i triangoli ABC siano rettangoli in A, i punti C devono appartenere al piano α passante per A perpendicolare alla retta AB. Affinché l'area del triangolo sia uguale a 2 cm^2 i punti devono appartenere alla circonferenza contenuta in α di centro A e raggio uguale ad $\overline{AC} = \frac{1}{10} \text{ cm}$. Cioè nel riferimento cartesiano di cui sopra, indicando con $A(a,b)$ il vertice in cui il triangolo ABC è rettangolo, il luogo richiesto è la circonferenza di equazione $(x-a)^2 + (y-b)^2 = \frac{1}{100}$. In altro modo, affinché il triangolo ABC sia rettangolo in A ed abbia area costante e pari a 2 cm^2 , la distanza di C da A deve essere costantemente pari ad $\overline{AC} = \frac{1}{10} \text{ cm}$ e cioè, ricordando la definizione di distanza si deve avere $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = \frac{1}{10}$, da cui elevando al quadrato ambo i membri si riottiene il luogo di equazione $(x-a)^2 + (y-b)^2 = \frac{1}{100}$.

Quesito 8

Si determini il cilindro di massimo volume inscritto in una sfera di 60 cm di raggio. Qual è la capacità di tale cilindro, espressa in litri?

Si consideri la figura seguente rappresentante in sezione la sfera ed il cilindro in essa inscritto.



Poniamo $\overline{OH} = x$ con $0 < x < 60$. Di conseguenza l'altezza del cilindro è $h = 2\overline{OH} = 2x$ mentre per il teorema di Pitagora $\overline{HC}^2 = \overline{OC}^2 - \overline{OH}^2 = 3600 - x^2$ per cui il volume del cilindro è $V(x) = \pi \cdot \overline{HC}^2 \cdot (2\overline{OH}) = 2\pi x(3600 - x^2)$ e la massimizzazione del volume è equivalente alla massimizzazione di $g(x) = x(3600 - x^2)$ con $0 < x < 60$. La derivata prima della funzione $g(x) = x(3600 - x^2)$ è $g'(x) = 3(1200 - x^2)$ per cui $g(x) = x(3600 - x^2)$ è strettamente crescente in $(0, 20\sqrt{3})$ e strettamente decrescente in $(20\sqrt{3}, 60)$; inoltre $g''(20\sqrt{3}) = -120\sqrt{3} < 0$ per cui il volume massimo lo si ha per $x = 20\sqrt{3}$ e misura $V_{\max} = V(20\sqrt{3}) = 96000\sqrt{3}\pi [\text{cm}^3] = 96\sqrt{3}\pi [\text{dm}^3] = 96\sqrt{3}\pi [\text{litri}] \cong 522.4 [\text{litri}]$ in quanto $1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ litro}$.