

Y557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE

Indirizzo: PIANO NAZIONALE INFORMATICA**Tema di:** MATEMATICA*Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.*

PROBLEMA 1

Sia f la funzione definita da

$$f(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \right) e^{-x}$$

dove n è un intero positivo e $x \in \mathbb{R}$

1. Si verifichi che la derivata di $f(x)$ è: $f'(x) = -\frac{x^n}{n!} e^{-x}$
2. Si dica se la funzione f ammette massimi e minimi (assoluti e relativi) e si provi che, quando n è dispari, $f(x) \leq 1$ per ogni x reale.
3. Si studi la funzione g ottenuta da f quando $n = 2$ e se ne disegni il grafico.
4. Si calcoli $\int_0^2 g(x) dx$ e se ne dia l'interpretazione geometrica.

PROBLEMA 2

In un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy , si consideri la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^3 + kx$, con k parametro reale.

1. Si dica come varia il grafico di f al variare di k (k positivo, negativo o nullo).
2. Sia $g(x) = x^3$ e γ il suo grafico. Si dimostri che γ e la retta d'equazione $y = 1 - x$ hanno un solo punto P in comune. Si determini l'ascissa di P approssimandola a meno di 0,1 con un metodo iterativo di calcolo.
3. Sia \mathbf{D} la regione finita del primo quadrante delimitata da γ e dal grafico della funzione inversa di g . Si calcoli l'area di \mathbf{D} .
4. La regione \mathbf{D} è la base di un solido \mathbf{W} le cui sezioni con piani perpendicolari alla bisettrice del primo quadrante sono tutte rettangoli di altezza 12. Si determini la sezione di area massima. Si calcoli il volume di \mathbf{W} .

Y557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE

Indirizzo: PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Tema di: MATEMATICA

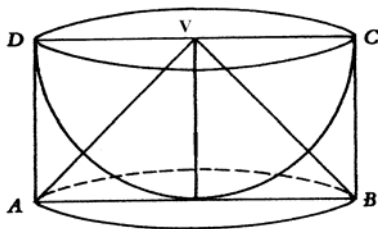
QUESTIONARIO

1. Siano: $0 < a < b$ e $x \in [-b, b]$. Si provi che: $\int_{-b}^b |x-a| dx = a^2 + b^2$.
2. Sono dati gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{a, b, c\}$. Tra le possibili *funzioni* (o *applicazioni*) di A in B , ce ne sono di *suriettive*? Di *iniettive*? Di *biiettive*?
3. Una moneta da 2 euro (il suo diametro è $25,75 \text{ mm}$) viene lanciata su un pavimento ricoperto con mattonelle quadrate di lato 10 cm . Quale è la probabilità che la moneta vada a finire internamente ad una mattonella? (cioè non tagli i lati dei quadrati)
4. “Esiste solo un poliedro regolare le cui facce sono esagoni”. Si dica se questa affermazione è vera o falsa e si fornisca una esauriente spiegazione della risposta.
5. Si considerino le seguenti espressioni:

$$\frac{0}{1}; \frac{0}{0}; \frac{1}{0}; 0^0$$

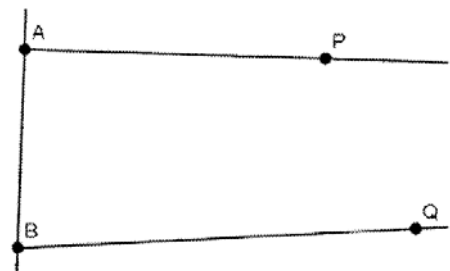
A quali di esse è possibile attribuire un valore numerico? Si motivi la risposta.

6. Con l'aiuto di una calcolatrice, si applichi il procedimento iterativo di Newton all'equazione $\sin x = 0$, con punto iniziale $x_0 = 3$. Cosa si ottiene dopo due iterazioni?
7. Si dimostri l'identità $\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} \frac{n-k}{k+1}$ con n e k naturali e $n > k$
8. Alla festa di compleanno di Anna l'età media dei partecipanti è di 22 anni. Se l'età media degli uomini è 26 anni e quella delle donne è 19, qual è il rapporto tra il numero degli uomini e quello delle donne?
9. Nei “Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze”, Galileo Galilei descrive la



costruzione di un solido che chiama *scodella* considerando una semisfera di raggio r e il cilindro ad essa circoscritto. La *scodella* si ottiene togliendo la semisfera dal cilindro. Si dimostri, utilizzando il principio di *Cavalieri*, che la *scodella* ha volume pari al cono di vertice V in figura.

10. “Se due punti P e Q del piano giacciono dalla stessa parte rispetto ad una retta AB e gli angoli $\hat{P}AB$ e $\hat{Q}BA$ hanno somma minore di 180° , allora le semirette AP e BQ , prolungate adeguatamente al di là dei punti P e Q , si devono intersecare”. Questa proposizione è stata per secoli oggetto di studio da parte di schiere di matematici. Si dica perché e con quali risultati.



Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

PROBLEMA 1

1)

$$f(x) = e^{-x} \cdot \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!} \rightarrow$$

$$f'(x) = e^{-x} \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{i \cdot x^{i-1}}{i!}}_{\substack{\text{L'indice } i \text{ parte da } 1 \text{ in quanto} \\ \text{la derivata di una costante (1)} \\ \text{è nulla}}} - e^{-x} \cdot \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!} = e^{-x} \left[\sum_{i=1}^n \frac{i \cdot x^{i-1}}{i!} - \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!} \right] \rightarrow$$

$$\rightarrow f'(x) = e^{-x} \left[\sum_{i=1}^n \frac{x^{i-1}}{(i-1)!} - \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!} \right] \xrightarrow{k=i-1} e^{-x} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} - \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!} \right] = e^{-x} \left[\left(\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} - \frac{x^n}{n!} \right) - \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!} \right] = -\frac{x^n}{n!} \cdot e^{-x}$$

2) Bisogna distinguere n pari ed n dispari ed n=0. Se n=0 la funzione diventa $f(x) = e^{-x}$ che non presenta estremi relativi ma come minimo assoluto 0 quando $x \rightarrow +\infty$ e come massimo assoluto $+\infty$ quando $x \rightarrow -\infty$.

Se n è pari (vedi caso n=2 del punto 3) non si hanno estremi relativi ma come per n=0 si ha minimo assoluto 0 quando $x \rightarrow +\infty$ e come massimo assoluto $+\infty$ quando $x \rightarrow -\infty$. L'assenza di estremi relativi è legata al fatto che per n pari gli zeri della derivata prima annullano anche le derivate successive di ordine pari mentre non annullano la prima derivata di ordine dispari successiva all'ultima di ordine pari annullata, ecco per cui esistono flessi e non estremi relativi. Se n è dispari si ha la situazione opposta nel senso che esistono estremi relativi in quanto i punti che annullano la derivata prima annullano le derivate successive di ordine dispari mentre non annullano la prima derivata di ordine pari successiva all'ultima di ordine dispari annullata. In tal caso si ha il massimo assoluto coincidente con il massimo relativo ed il minimo assoluto $-\infty$ quando $x \rightarrow -\infty$.

Se n è dispari si può dimostrare per derivazione diretta che esiste un unico estremo relativo e questo estremo relativo è un massimo. Tale estremo relativo lo si ha all'ascissa $x=0$ cui corrisponde $f(0)=1$. Inoltre in tal caso il massimo relativo coincide con quello assoluto, ecco per cui $f(x) \leq 1$ per ogni x reale ed n dispari.

$$3) g(x) = \left(\frac{x^2 + 2x + 2}{2} \right) e^{-x}$$

a. Dominio: R

b. Intersezione asse ascisse: non ve ne sono

c. Intersezione asse ordinate: $(0,1)$

d. Positività: la funzione è sempre positiva in tutto il dominio \mathbb{R}

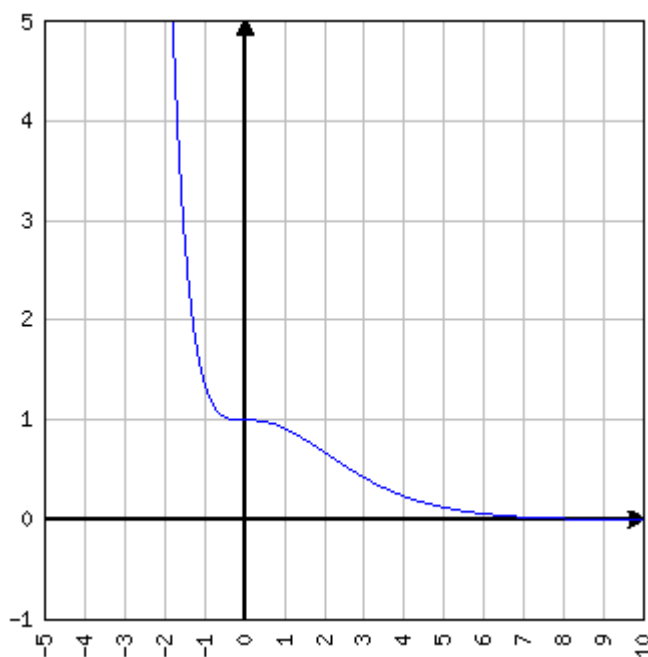
e. Asintoti: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 2x + 2}{2e^x} \right) \stackrel{DeL'Hospital}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e^x} \right) = 0$ mentre

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 + 2x + 2}{2} \right) e^{-x} = +\infty$ per cui $y=0$ è asintoto orizzontale destro

f. Crescenza e decrescenza: $g'(x) = -\frac{x^2}{2} \cdot e^{-x}$ per cui la funzione è strettamente decrescente in \mathbb{R} e si annulla in $x = 0$.

g. Flessi: $g''(x) = -x \cdot e^{-x} + \frac{x^2}{2} \cdot e^{-x} = e^{-x} \left(\frac{x^2 - 2x}{2} \right)$ per cui in $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ la funzione volge la concavità verso l'alto. Inoltre la funzione presenta un flesso a tangente orizzontale in $(0,1)$ ed uno a tangente obliqua in $(2, 5e^{-2})$.

Il grafico è sotto presentato:



4) $S = \int_0^2 \left(\frac{x^2 + 2x + 2}{2} \right) e^{-x} dx$. Si integra per parti:

$$\begin{aligned}
\int \left(\frac{x^2 + 2x + 2}{2} \right) e^{-x} dx &= - \left(\frac{x^2 + 2x + 2}{2} \right) e^{-x} + \int (x+1) e^{-x} dx = \\
&= - \left(\frac{x^2 + 2x + 2}{2} \right) e^{-x} - (x+1) e^{-x} + \int e^{-x} dx = \\
&= - \left(\frac{x^2 + 2x + 2}{2} \right) e^{-x} - (x+1) e^{-x} - e^{-x} = -e^{-x} \left[\left(\frac{x^2 + 2x + 2}{2} \right) + (x+1) + 1 \right] = -e^{-x} \left(\frac{x^2 + 4x + 6}{2} \right) \Rightarrow \\
S &= \left[-e^{-x} \left(\frac{x^2 + 4x + 6}{2} \right) \right]_0^2 = 3 - 9e^{-2}
\end{aligned}$$

e rappresenta l'area sottesa da $g(x) = \left(\frac{x^2 + 2x + 2}{2} \right) e^{-x}$ nell'intervallo $[0,2]$ i cui estremi sono le ascisse dei due flessi della curva.

Seconda prova scritta – Matematica – problema 2 – Pros.ssa Angela D'Amato

Notiamo che indipendentemente dal valore di k la funzione è ben definita per ogni x reale: $D = \mathbb{R}$.

Scriviamo i limiti principali

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Scriviamo le espressioni di f , f' ed f'' :

$$f(x) = x^3 + kx = x(x^2 + k)$$

$$f'(x) = 3x^2 + k$$

$$f''(x) = 6x$$

Punto 1.

Osserviamo che se $k=0$, la funzione ha un punto triplo nell'origine, che rappresenta anche un punto di flesso ascendente a tangente orizzontale, in quanto si annullano i valori sia di f , sia di f' sia di f'' in $x=0$.

La funzione, però, per ogni valore di k reale, ha il grafico passante per l'origine ed ha un flesso ascendente nell'origine stessa, e lo si può vedere dallo studio del segno della derivata seconda che non dipende da k :

$f''(x)$ ha lo stesso segno di x , e quindi il grafico della funzione $f(x)$ volge la sua concavità verso il basso in $(-\infty, 0)$ e verso l'alto in $(0, +\infty)$.

Solo se $k=0$ la tangente inflessionale è orizzontale, mentre se $k \neq 0$ tale tangente è obliqua, ed ha coefficiente angolare $k = f'(0)$.

Se $k \geq 0$, la funzione è strettamente crescente in $(-\infty, +\infty)$, in quanto la derivata è sempre positiva (solo in $x=0$ si annulla nel caso particolare di $k=0$, ma questo semplice valore non toglie il fatto che la funzione sia iniettiva). Al contrario, se $k < 0$, la f' si annulla in

due punti (radici): $x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{-k}{3}}$, ed è positiva all'esterno dell'intervallo delle radici e

negativa all'interno. Di conseguenza la $f(x)$ è crescente in $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{-k}{3}}\right)$, decrescente in $\left(-\sqrt{\frac{-k}{3}}, +\sqrt{\frac{-k}{3}}\right)$ e di nuovo crescente in $\left(+\sqrt{\frac{-k}{3}}, +\infty\right)$.

Dunque, se $k < 0$, la $f(x)$ presenta un massimo nel punto di coordinate

$$\left(-\sqrt{\frac{-k}{3}}, -\frac{2}{3}k\sqrt{\frac{-k}{3}}\right) \text{ ed un minimo nel punto di coordinate } \left(\sqrt{\frac{-k}{3}}, \frac{2}{3}k\sqrt{\frac{-k}{3}}\right).$$

Punto 2.

$$g(x) = x^3$$

$$g'(x) = 3x^2$$

$$g''(x) = 6x$$

γ è la curva di equazione $y = x^3$, che mettiamo a sistema con la retta di equazione $y = 1 - x$.

Confrontando le due equazioni otteniamo $x^3 + x - 1 = 0$, che non ha radici razionali, però ha almeno una soluzione reale in quanto è una cubica (polinomio di grado dispari), in particolare una funzione continua che assume almeno una volta tutti i valori reali (basta vedere i limiti calcolati all'inizio, e considerare il teorema dei valori intermedi). Proviamo a studiare questa nuova cubica come funzione.

$$h(x) = x^3 + x - 1$$

$$h'(x) = 3x^2 + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathfrak{R}$$

Dunque $h(x)$, che come f e g assume almeno una volta tutti i valori reali, è una funzione strettamente crescente, dunque è anche iniettiva, per cui assume una sola volta ogni valore reale, dunque anche lo zero.

Questo dimostra che l'equazione $x^3 + x - 1 = 0$ ha un'unica soluzione reale. La chiamiamo $x=P$ e la troviamo, utilizzando il teorema di esistenza degli zeri, in maniera approssimata con un metodo iterativo: scegliamo una variante del metodo di bisezione.

Per tentativi vediamo che $h(0) = -1 < 0$, $h(1) = 1 > 0$, dunque scopriamo che $0 < P < 1$.

Dobbiamo individuare la prima cifra decimale esatta.

Con l'aiuto della calcolatrice troviamo $h(0.5)=-0.375$, che ha segno opposto rispetto ad $h(1)$, pertanto concludiamo che $0.5 < P < 1$. Troviamo $h(0.7)=0.043 > 0$, che ha segno opposto rispetto a $h(0.5)$.

Troviamo $h(0.6)=-0.184$ che ha segno opposto rispetto ad $h(0.7)$. Dunque $0.6 < P < 0.7$. per vedere se è approssimata meglio da 0.6 oppure da 0.7, vediamo $h(0.65)=-0.075375 < 0$. Dunque $0.65 < P < 0.7$.

La migliore approssimazione alla prima cifra decimale è $P=0.7$.

Punto 3.

Sia $y = i(x) = \sqrt[3]{x}$ l'equazione del grafico della funzione inversa di $g(x)$.

Nel primo quadrante γ e il grafico di questa nuova funzione si incontrano nei punti di coordinate $(0,0)$ e $(1,1)$: basta mettere a sistema le due equazioni; da $x^3 = \sqrt[3]{x}$, elevando al cubo ambo i membri, si ha

$$x^9 = x \rightarrow x^9 - x = 0 \rightarrow x(x^8 - 1) = 0 \rightarrow x(x^4 - 1)(x^4 + 1) = 0$$

Si potrebbe anche continuare ma non è necessario. Interessano solo le due soluzioni che abbiamo evidenziato, per le quali ovviamente vale anche $y=x$.

Per il calcolo dell'area di D , possiamo utilizzare la proprietà che le funzioni inverse hanno grafici simmetrici rispetto alla retta $y=x$, per cui procediamo trovando l'area di D come il doppio dell'area compresa tra il grafico di $y=x$ ed il grafico di $y = x^3$:

$$Area(D) = 2 \int_0^1 (x - x^3) dx = 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = 2 \left(\frac{1}{4} \right) = \frac{1}{2}$$

Punto 4

In corso di risoluzione

Seconda prova scritta – Matematica – Questionario – Pros.ssa Angela D'Amato

Quesito n. 1.

$$\begin{aligned} \int_{-b}^b |x-a| dx &= \int_{-b}^a (a-x) dx + \int_a^b (x-a) dx = \\ &= [ax]_{-b}^a - \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{-b}^a + \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_a^b - [ax]_a^b = a \cdot (a+b) - \frac{1}{2} (a^2 - b^2) + \frac{1}{2} (b^2 - a^2) - a \cdot (b-a) = \\ &= a^2 + ab - \frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{2} b^2 + \frac{1}{2} b^2 - \frac{1}{2} a^2 - ab + a^2 = a^2 + b^2 \end{aligned}$$

Quesito n. 2. **Come ordinamento**

L'insieme A ha 4 elementi, l'insieme B ha 3 elementi. Poiché la cardinalità di A è maggiore della cardinalità di B, non esistono né funzioni iniettive né tantomeno biettive da A a B, ma ne esistono di suriettive, anzi ne esistono precisamente 24, perché esistono 4 partizioni dell'insieme B in 3 parti, e ciascuna delle tre parti può corrispondere ad uno ed un solo elemento di A in 6 (=3!) modi, per cui le funzioni suriettive da A a B sono $4 \cdot 3! = 4! = 24$.

Quesito n. 3.

Perché la moneta vada a finire all'interno della mattonella, è necessario e sufficiente che il suo centro cada all'interno di un quadrato di lato pari alla lunghezza del lato quadrato della mattonella meno due volte il raggio della moneta, e quindi la probabilità è data dal rapporto tra l'area di questo quadrato e l'area della superficie della mattonella, dunque, trasformando i millimetri in centimetri:

$$P = \left(\frac{(10 - 2 \cdot 0,75)}{10} \right)^2 = \frac{7,425^2}{100} = \frac{55,130625}{100} \text{ dunque circa il } 55\%.$$

Quesito n. 4. **Come ordinamento**

L'affermazione è falsa, nel senso che non esiste alcun poliedro regolare con facce esagonali.

La motivazione sulla impossibilità è la seguente: perché un poliedro sia regolare le facce devono essere tutte congruenti fra loro e devono essere poligoni regolari. Naturalmente anche i diedri e gli angoloidi devono essere tutti congruenti tra loro. In particolare ci soffermiamo agli angoloidi: devono esistere almeno tre facce che confluiscono a ciascun vertice (e che costituiscono un triedro), ma perché l'angoloide sia ben definito la somma

degli angoli delle facce che confluiscono allo stesso vertice deve essere minore di un angolo giro (a meno che il poliedro non sia concavo, ma in tal caso non potrà essere regolare). Un angolo di un esagono regolare misura 120° , e il triplo di tale misura è proprio 360° , cioè l'angolo giro.

Per questo motivo non possono esistere poliedri regolari a facce esagonali ovvero a facce poligonali con più di sei lati.

Quesito n. 5. Come ordinamento

Solo la prima espressione ha un valore numerico ben preciso: $\frac{0}{1} = 0$.

Le altre espressioni hanno significato solo se "messe tra parentesi graffe", nella teoria dei limiti. Sono forme indeterminate, e possono assumere valori diversi a seconda del tipo di funzione.

La seconda $\frac{0}{0}$ può assumere qualsiasi valore o può anche non esistere, la terza $\frac{1}{0}$ può assumere valore (sempre come limite) di $+\infty$ o $-\infty$, ma può anche non esistere, la quarta è spesso oggetto di discussione tra i matematici, ma anch'essa può assumere qualsiasi valore, anche se limitatamente al campo di definizione, dunque dovrebbe essere assunta come positiva.

Quesito n. 6.

Partendo da $x_0=3$, sapendo che $\frac{\pi}{2} < 3 < \pi$, e molto vicino a π , siamo nella situazione di cercare la soluzione nel tratto in cui la funzione è decrescente $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$, a destra di $x_0 = 3$. Infatti, se chiamiamo $f(x) = \sin x$, $f'(x) = \cos x$, $\frac{f(x)}{f'(x)} = \tan x$, e risulta $f(3) > 0, f'(3) < 0$.

Applicando la formula di Newton, $x_1 = 3 - \tan 3 = 3.142546543$, con l'aiuto della calcolatrice, ed abbiamo $x_1 > x_0$ poiché $\tan 3 < 0$.

Osserviamo che così abbiamo ottenuto un numero maggiore del valore che ci aspettiamo come soluzione (π), ed infatti $f(x_1) < 0, f'(x_1) < 0$. Ci aspettiamo un valore di $x_2 < x_1$:

$$x_2 = x_1 - \tan(x_1) = 3.141592653$$

Sempre con l'aiuto della calcolatrice, scopro che la differenza tra x_1 e x_2 è inferiore al millesimo, ma la differenza $\pi - x_2 = 2.7 \cdot 10^{-10}$, dunque è impressionante la rapidità di convergenza di questo metodo con una funzione goniometrica come quella data.

Quesito n. 7. Come ordinamento

Attraverso i fattoriali, scriviamo il primo coefficiente binomiale e poi lavoriamo con il secondo:

$$\binom{n}{k+1} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \text{ dalle ipotesi segue che } n, k+1 \text{ e } n-k-1 \text{ sono non negativi.}$$

$$\binom{n}{k} \frac{n-k}{k+1} = \frac{n!}{(k)!(n-k)!} \cdot \frac{n-k}{k+1} = \frac{n!}{(k)!(k+1)} \cdot \frac{n-k}{(n-k)!} = \frac{n!}{(k+1)!} \cdot \frac{1}{(n-k-1)!} \text{ C.V.D.}$$

Quesito n. 8.

Se chiamiamo x il numero degli uomini ed y il numero delle donne, abbiamo la seguente situazione:

$$\frac{26x + 19y}{x + y} = 22$$

Supponendo $x + y \neq 0$, si ha una semplice equazione lineare in due incognite. Si ha $4x = 3y$, da cui $y = \frac{4}{3}x$. dunque il rapporto tra il numero degli uomini e quello delle donne è $4/3$.

Quesito n. 9 **Come ordinamento**

Utilizziamo la figura del testo, e consideriamo le sezioni dei vari solidi con piani paralleli alle basi del cilindro: alla base di diametro AB , la circonferenza di diametro AB appartiene interamente sia al cono sia alla scodella, mentre la sezione piana che contiene la base del cilindro di diametro CD ha in comune il punto V con il cono e la circonferenza con la scodella, ed entrambe le figure piane hanno area nulla. Questo ci garantisce che il cono e la scodella sono ben posizionati come in figura.

Dimostriamo, secondo Cavalieri, che ad una generica altezza, le sezioni con lo stesso piano (della scodella e del cono) sono equivalenti:

chiamiamo R la misura del raggio del cilindro e della sfera. Chiamiamo O il centro del cerchio di diametro AB . Ad una certa altezza h , prendiamo il punto P , intersezione del piano sezione con il segmento VO , con PO di lunghezza h , e, considerando una sezione verticale della figura, chiamiamo Q l'intersezione con una generatrice del cono e T l'intersezione con un punto della sfera. In seguito utilizzeremo non h ma $r=R-h$.

La sezione del cono risulta essere un cerchio di raggio $r = PQ = VP = R - h$

Mentre la sezione della scodella risulta essere una corona circolare di raggio maggiore R e di raggio minore $r' = \sqrt{R^2 - r^2}$

L'area della sezione del cono è dunque πr^2

L'area della sezione della scodella è $\pi R^2 - \pi r'^2 = \pi R^2 - \pi(R^2 - r^2) = \pi r^2$ C.V.D.

Quesito n. 10.

L'affermazione è una diretta conseguenza del quinto postulato di Euclide.

Tentativi di dimostrazione di tale postulato attraverso i precedenti, per negare che anche tale proposizione fosse un assioma, sono andati a vuoto (ricordiamo in particolare quelli di Saccheri e Lambert).

Dalla negazione di tale postulato sono nate le cosiddette "Geometrie non euclidee". Ricordiamo in particolare i fondatori di due di queste geometrie: Lobacevskij (geometria iperbolica) e Riemann (geometria ellittica).