

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO CORSO DI ODINAMENTO 2011

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti scelti nel questionario¹.

PROBLEMA 1

Si considerino le funzioni f e g definite, per tutti gli x reali, da:

$$f(x) = x^3 - 4x \quad \text{e} \quad g(x) = \text{sen } \pi x$$

1. Fissato un conveniente sistema di riferimento cartesiano Oxy , si studino f e g e se ne disegnano i rispettivi grafici G_f e G_g .
2. Si calcolino le ascisse dei punti di intersezione di G_f con la retta $y = -3$. Successivamente, si considerino i punti di G_g a tangente orizzontale la cui ascissa è compresa nell'intervallo $[-6; 6]$ e se ne indichino le coordinate.
3. Sia R la regione del piano delimitata da G_f e G_g sull'intervallo $[0; 2]$. Si calcoli l'area di R .
4. La regione R rappresenta la superficie libera dell'acqua contenuta in una vasca. In ogni punto di R a distanza x dall'asse y la misura della profondità dell'acqua nella vasca è data da $h(x) = 3 - x$. Quale integrale definito dà il volume dell'acqua? Supposte le misure in metri, quanti litri di acqua contiene la vasca?

PROBLEMA 2

Sia f la funzione definita sull'insieme \mathbb{R} dei numeri reali da

$$f(x) = (ax + b)e^{-\frac{x}{3}} + 3$$

dove a e b sono due numeri reali che si chiede di determinare sapendo che f ammette un massimo nel punto d'ascissa 4 e che $f(0) = 2$.

¹Durata della prova: 6 ore.

È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

1. Si provi che $a = 1$ e $b = -1$.
2. Si studi su \mathbb{R} la funzione $f(x) = (x - 1)e^{-\frac{x}{3}} + 3$ e se ne tracci il grafico Γ nel sistema di riferimento Oxy .
3. Si calcoli l'area della regione di piano del primo quadrante delimitata da Γ , dall'asse y e dalla retta $y = 3$.
4. Il profitto di un'azienda, in milioni di euro, è stato rappresentato nella tabella sottostante designando con x_i l'anno di osservazione e con y_i il corrispondente profitto.

Anno	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
x_i	0	1	2	3	4	5	6
y_i	1,97	3,02	3,49	3,71	3,80	3,76	3,65

Si cerca una funzione che spieghi il fenomeno dell'andamento del profitto giudicando accettabile la funzione g definita su \mathbb{R}^+ se per ciascun x_i , oggetto dell'osservazione, si ha : $|g(x_i) - y_i| \leq 10^{-1}$. Si verifichi, con l'aiuto di una calcolatrice, che è accettabile la funzione f del punto 2 e si dica, giustificando la risposta, se è vero che, in tal caso, l'evoluzione del fenomeno non potrà portare a profitti inferiori ai 3 milioni di euro.

QUESTIONARIO

1. Un serbatoio ha la stessa capacità del cilindro di massimo volume inscritto in una sfera di raggio 60 cm. Qual è la capacità in litri del serbatoio?
2. Si trovi il punto della curva $y = \sqrt{x}$ più vicino al punto di coordinate $(4; 0)$.
3. Sia R la regione delimitata dalla curva $y = x^3$, dall'asse x e dalla retta $x = 2$ e sia W il solido ottenuto dalla rotazione di R attorno all'asse y . Si calcoli il volume di W .
4. Il numero delle combinazioni di n oggetti a 4 a 4 è uguale al numero delle combinazioni degli stessi oggetti a 3 a 3. Si trovi n .
5. Si trovi l'area della regione delimitata dalla curva $y = \cos x$ e dall'asse x da $x = 1$ a $x = 2$ *radianti*.

6. Si calcoli

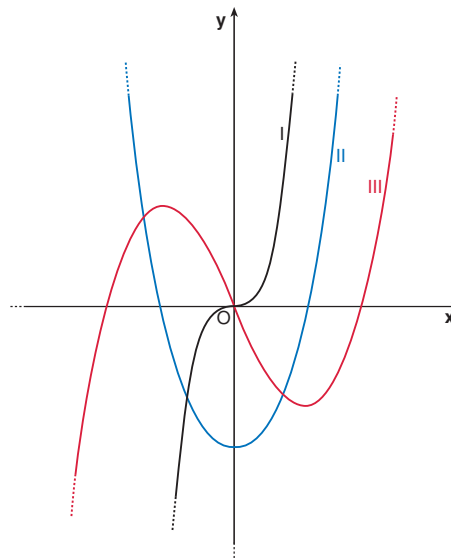
$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a}{x - a}$$

7. Si provi che l'equazione: $x^{2011} + 2011x + 12 = 0$ ha una sola radice compresa fra -1 e 0 .

8. In che cosa consiste il problema della *quadratura del cerchio*? Perché è citato così spesso?

9. Si provi che, nello spazio ordinario a tre dimensioni, il luogo geometrico dei punti equidistanti dai tre vertici di un triangolo rettangolo è la retta perpendicolare al piano del triangolo passante per il punto medio dell'ipotenusa.

10. Nella figura sotto, denotati con I, II e III, sono disegnati tre grafici.



Uno di essi è il grafico di una funzione f , un altro lo è della funzione derivata f' e l'altro ancora di f'' . Quale delle seguenti alternative identifica correttamente ciascuno dei tre grafici?

	f	f'	f''
A)	I	II	III
B)	I	III	II
C)	II	III	I
D)	III	II	I
E)	III	I	II

Si motivi la risposta.

SOLUZIONE DEL PROBLEMA 1 CORSO DI ORDINAMENTO 2011

1. Studio di $y = f(x)$:

- $D_f = \mathbb{R}$.

- Ricerca simmetrie: la funzione è dispari, infatti:

$$f(-x) = -f(x).$$

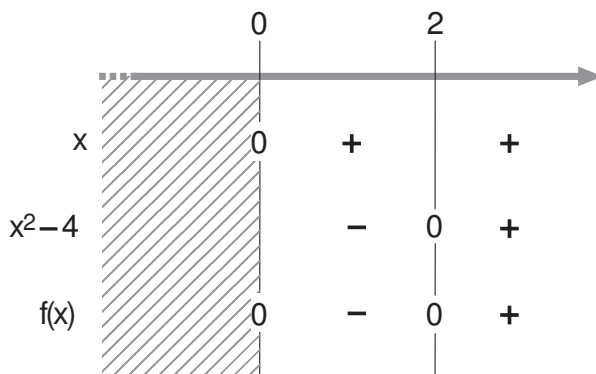
Per questo motivo studiamo la funzione per $x \geq 0$; ricaveremo l'altra metà del grafico per simmetria rispetto all'origine O .

- Punti di intersezione con gli assi coordinati: cominciamo con l'asse x :

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = f(x) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^3 - 4x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x(x^2 - 4) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \vee x = \pm 2 \end{cases}$$

Ci sono tre punti di intersezione con l'asse x : $A_1(-2; 0)$, $A_2(0; 0)$, $A_3(2; 0)$. Di queste, A_2 è intersezione di $y = f(x)$ anche con l'asse y .

• Positività: $x(x^2 - 4) > 0$:



Quindi la funzione $f(x)$ è positiva (in $x \geq 0$) per $x > 2$.

- Comportamento della funzione agli estremi del dominio: non esistono asintoti verticali. Inoltre, poiché

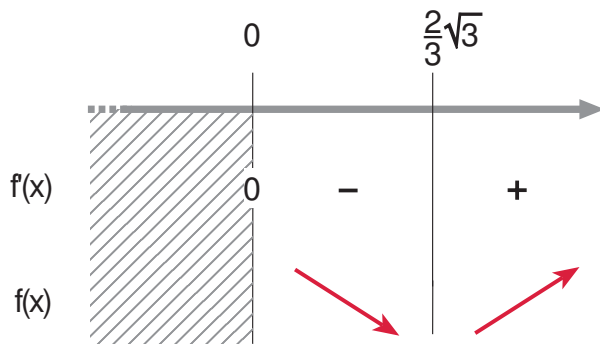
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty,$$

non esistono asintoti orizzontali, né obliqui.

- Derivata prima:

$$f'(x) = 3x^2 - 4.$$

Studio del segno di $f'(x)$:



Nell'intervallo di studio la funzione è crescente per $x > \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Tale valore individua un punto di minimo relativo, secondo lo schema del segno di $f'(x)$ sopra riportato; calcoliamo le sue coordinate:

$$f\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{8\sqrt{3}}{9} - \frac{8\sqrt{3}}{3} = -\frac{16\sqrt{3}}{9}.$$

Quindi il punto di minimo relativo è

$$M_1\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}; -\frac{16\sqrt{3}}{9}\right)$$

e per simmetria il punto

$$M_2\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}; \frac{16\sqrt{3}}{9}\right)$$

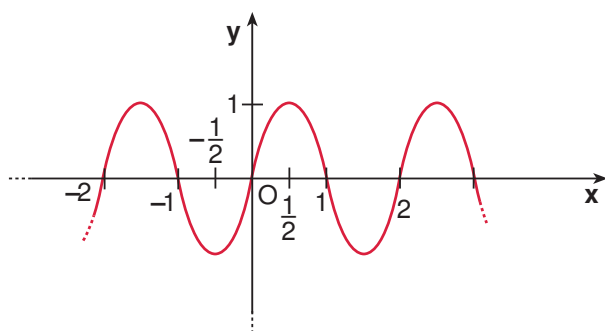
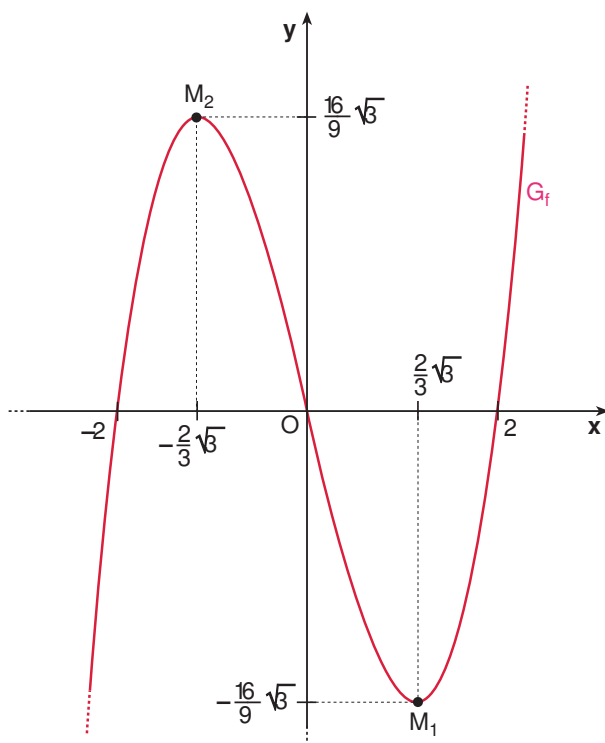
è punto di massimo relativo.

- Derivata seconda:

$$f''(x) = 6x.$$

Studio del segno di $f''(x)$: nell'intervallo di studio è evidente che $f''(x)$ è sempre non negativa. Pertanto in tale intervallo la funzione volge la concavità verso l'alto. Inoltre il punto $O(0;0)$ in cui si annulla $f''(x)$ è un punto di flesso.

- Tracciamo il grafico G_f di $y = f(x)$, sfruttando la simmetria rispetto all'origine:



Studio di $g(x)$: tale funzione si ottiene da $y = \sin x$ mediante una contrazione orizzontale che porta il punto $(2\pi; 0)$ in $(2; 0)$.

2. - Calcoliamo l'intersezione G_f e la retta $y = -3$:

$$\begin{cases} y = -3 \\ y = f(x) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -3 \\ x^3 - 4x + 3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -3 \\ (x-1)(x^2 + x - 3) = 0 \end{cases}$$

da cui si ottengono le ascisse richieste: $x_1 = 1$ e $x^2 + x - 3 = 0$, cioè

$$x_1 = 1, x_2 = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2} \text{ e } x_3 = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}.$$

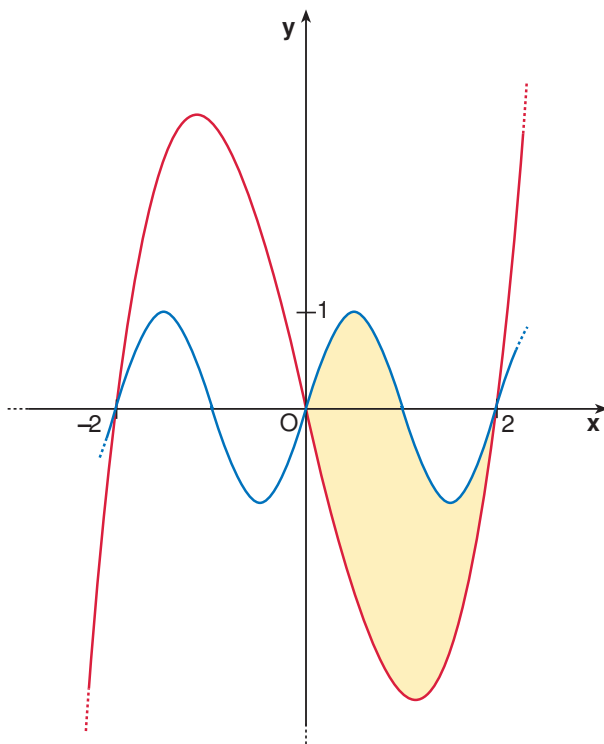
- I punti a tangente orizzontale del grafico di $y = \sin x$ nell'intervallo $[-6\pi; 6\pi]$ hanno coordinate

$$\left(\frac{2k+1}{2}\pi; (-1)^k\right) \quad \text{per } -6 \leq k \leq 5, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Di conseguenza i punti a tangente orizzontale di G_g compresi nell'intervallo $[-6; 6]$ sono:

$$\left(\frac{2k+1}{2}; (-1)^k\right) \quad \text{per } -6 \leq k \leq 5, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

3. Individuiamo graficamente la regione R : L'area di R è il risultato dell'integrale



$$\int_0^2 [g(x) - f(x)] dx$$

cioè

$$\begin{aligned} \int_0^2 [\sin \pi x - x^3 + 4x] dx &= \left[-\frac{1}{\pi} \cos \pi x - \frac{x^4}{4} + 2x^2 \right]_0^2 = \\ &= -\frac{1}{\pi} \cos 2\pi - 4 + 8 + \frac{1}{\pi} \cos 0 = 4. \end{aligned}$$

4. Il volume della vasca può essere calcolato nel modo seguente: sezioniamo il solido in esame con piani del tipo $x = x_0$ perpendicolari alla superficie della vasca e paralleli all'asse y . Otteniamo dei rettangoli di area

$$S(x_0) = [g(x_0) - f(x_0)] \cdot h(x_0).$$

Quindi il volume della vasca espresso in m^3 è equivalente al valore dell'integrale definito:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 S(x)dx = \int_0^2 [\text{sen } \pi x - x^3 + 4x] \cdot (3 - x)dx = \\ &= 3 \int_0^2 \text{sen } \pi x dx - \int_0^2 x \text{sen } \pi x dx + \int_0^2 (-3x^3 + x^4 + 12x - 4x^2) dx = \\ &= \left[\frac{3}{\pi} \cos \pi x - \frac{3}{4}x^4 + \frac{x^5}{5} + 6x^2 - \frac{4}{3}x^3 \right]_0^2 - \int_0^2 x \text{sen } \pi x dx. \end{aligned}$$

L'integrale $\int_0^2 x \text{sen } \pi x dx$ può essere risolto per parti secondo la formula

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

e ponendo

$$f(x) = x, \quad g'(x) = \text{sen } \pi x.$$

Quindi

$$\begin{aligned} \int_0^2 x \text{sen } \pi x dx &= \left[-\frac{x}{\pi} \cos \pi x \right]_0^2 + \int_0^2 \frac{1}{\pi} \cos \pi x dx \\ &= -\frac{2}{\pi} + \left[\frac{1}{\pi^2} \text{sen } \pi x \right]_0^2 = -\frac{2}{\pi}. \end{aligned}$$

In conclusione, sostituendo nell'espressione del volume V si ottiene:

$$V = \left(\frac{116}{15} + \frac{2}{\pi} \right) m^3 = \frac{116\pi + 30}{15\pi} m^3$$

e perciò la capacità della vasca è di circa

$$8369,95l.$$

SOLUZIONE DEL PROBLEMA 2
CORSO DI ORDINAMENTO 2011

1. Sostituiamo il valore $x = 0$ nell'espressione di $f(x)$, che sarà, quindi:

$$be^0 + 3 = 2 \Rightarrow b = -1.$$

Quindi

$$f(x) = (ax - 1)e^{-\frac{x}{3}} + 3.$$

Imponiamo che la funzione ammetta un massimo nel punto di ascissa 4:

$$\begin{cases} f'(x) = \left(-\frac{a}{3}x + \frac{1}{3} + a\right) e^{-\frac{x}{3}} \\ f'(4) = 0 \end{cases} \Rightarrow \left(-\frac{4}{3}x + \frac{1}{3} + a\right) e^{-\frac{4}{3}} = 0$$

cioè $a = 1$.

Pertanto

$$f'(x) = \left(-\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}\right) e^{-\frac{x}{3}} = \frac{1}{3}(4 - x)e^{-\frac{x}{3}}$$

da cui deduciamo il seguente quadro relativo al segno di $f'(x)$:

		+4	
	----->		
$4-x$	+	0	-
$e^{-\frac{x}{3}}$	+		+
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗		↘

Il valore $x = 4$ è effettivamente quello in corrispondenza del massimo relativo richiesto.

In definitiva, la funzione f è pari a

$$f(x) = (x - 1)e^{-\frac{x}{3}} + 3.$$

2. Studio della funzione $f(x)$.

- Il dominio è \mathbb{R} .
- Non esistono simmetria del grafico Γ di $y = f(x)$.
- Dato che non si possono determinare per via analitica le eventuali intersezioni con l'asse x , dedurremo la loro posizione e il loro valore dallo studio dei limiti e delle derivate della funzione.

Ricordiamo solo l'intersezione con l'asse y già nota: $(0; 2)$.

- Comportamento della funzione agli estremi del dominio: non esistono asintoti verticali. Cerchiamo gli asintoti orizzontali e obliqui. Osserviamo subito che il primo termine del limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [(x-1)e^{-\frac{x}{3}} + 3]$$

si presenta come una forma indeterminata del tipo $+\infty \cdot 0$, che si può risolvere utilizzando il teorema di de L'Hospital.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [(x-1)e^{-\frac{x}{3}} + 3] = 3 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{e^{\frac{x}{3}}} = 3 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{3}e^{\frac{x}{3}}} = 3$$

Quindi $y = 3$ è asintoto orizzontale destro.

Ora, poiché

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-\frac{x}{3}} = +\infty,$$

si ha

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [(x-1)e^{-\frac{x}{3}} + 3] = -\infty$$

e

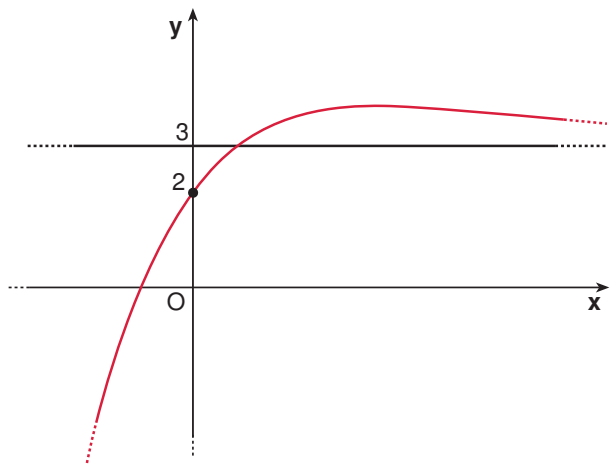
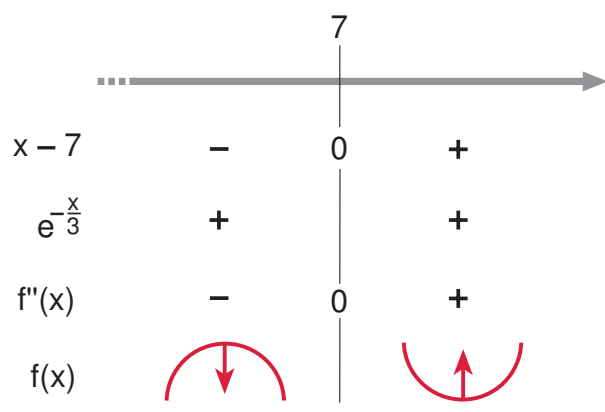
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x-1)e^{-\frac{x}{3}} + 3}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{(x-1)e^{-\frac{x}{3}}}{x} + \frac{3}{x} \right] = +\infty.$$

Quindi non esistono né asintoto orizzontale né asintoto obliquo sinistro.

- Studio della derivata prima. Essa è stata già studiata nel punto 1: la funzione è crescente nell'intervallo $] -\infty; -4[$ e presenta un massimo assoluto nel punto di ascissa $x = -4$ di coordinate $(-4; 3e^{-\frac{4}{3}+3})$.
- Studio della derivata seconda:

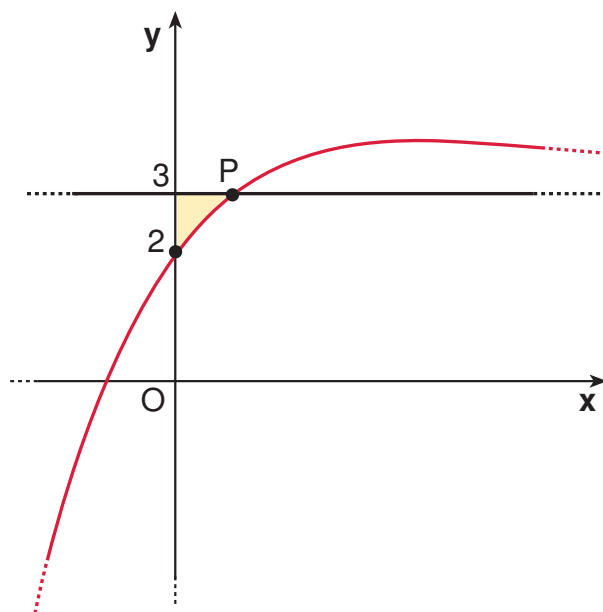
$$f''(x) = \frac{1}{9}(x-7)e^{-\frac{x}{3}}.$$

Studiamo il suo segno. Perciò la funzione volge la concavità verso l'alto per $x > 7$ e presenta un flesso nel punto di coordinate $(7; 6e^{-\frac{7}{3}+3})$.



- Grafico Γ di $y = f(x)$: Osserviamo che dal grafico si può dedurre l'esistenza di un'unica intersezione tra il grafico e l'asse x , di scissa compresa tra i valori $x = -2$ e $x = -1$.

3. Individuiamo la regione di piano indicata.



Cerchiamo il punto P , intersezione tra la funzione $y = f(x)$ e la retta $y = 3$.

$$\begin{cases} y = (x - 1)e^{-\frac{x}{3}} + 3 \\ y = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} (x - 1)e^{-\frac{x}{3}} = 0 \\ y = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$$

Il punto P ha coordinate $(1; 3)$.

L'area della regione assegnata vale:

$$\begin{aligned} \int_0^1 [3 - f(x)] dx &= \int_0^1 [3 - (x - 1)e^{-\frac{x}{3}} - 3] dx = \\ &= - \int_0^1 x e^{-\frac{x}{3}} dx + \int_0^1 e^{-\frac{x}{3}} dx = \\ &= - \int_0^1 x e^{-\frac{x}{3}} dx + [-3 e^{-\frac{x}{3}}]_0^1 = \\ &= - \int_0^1 x e^{-\frac{x}{3}} dx - 3 e^{-\frac{1}{3}} + 3. \end{aligned}$$

Il primo integrale si calcola per parti, ricordando la formula

$$\int_a^b f(x) g'(x) dx = [f(x) g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) g(x) dx$$

e assumendo $f(x) = x$ e $g'(x) = e^{-\frac{x}{3}}$, si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_0^1 x e^{-\frac{x}{3}} dx &= [-3x e^{-\frac{x}{3}}]_0^1 + 3 \int_0^1 e^{-\frac{x}{3}} dx = \\ &= -3e^{-\frac{1}{3}} - 9 [e^{-\frac{x}{3}}]_0^1 = \\ &= 9 - 12e^{-\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

Quindi l'area cercata vale:

$$-9 + 12e^{-\frac{1}{3}} - 3e^{-\frac{1}{3}} + 3 = 9e^{-\frac{1}{3}} - 6.$$

4. Riportiamo la tabella fornita completandola con il calcolo dei valori di $f(x_i)$ e $|f(x_i) - y_i|$ (questi ultimi arrotondati alla terza cifra decimale):

Anno	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
x_i	0	1	2	3	4	5	6
y_i	1,97	3,02	3,49	3,71	3,80	3,76	3,65
$f(x_i)$	2	3	$e^{-\frac{2}{3}} + 3$	$2e^{-1} + 3$	$3e^{-\frac{4}{3}} + 3$	$4e^{-\frac{5}{3}} + 3$	$5e^{-2} + 3$
$ f(x_i) - y_i $	0,030	0,020	$\simeq 0,023$	$\simeq 0,026$	$\simeq 0,009$	$\simeq 0,004$	$\simeq 0,027$

La funzione f è accettabile relativamente ai dati forniti. Tuttavia, nonostante f assuma valori maggiori di 3 per $x \geq 2$, non possiamo affermare che l'evoluzione del fenomeno porterà a profitti non inferiori a 3 milioni di euro. Infatti se consideriamo, per esempio, $x = 20$ (cioè i dati relativi all'anno 2024),

$$f(20) = 19e^{-\frac{20}{3}}$$

e ricordiamo che $|f(20) - y_{20}| \leq 10^{-1}$, allora

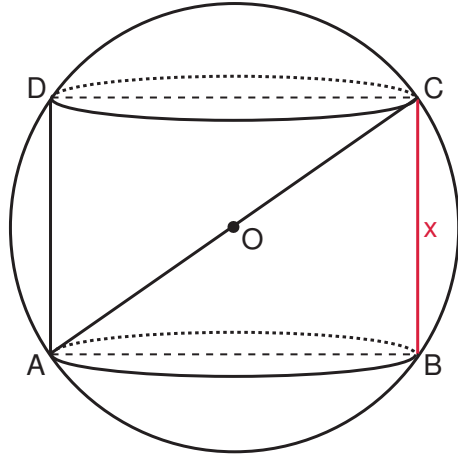
$$f(20) - 10^{-1} \leq y_{20} \leq f(20) + 10^{-1}$$

che arrotondato alla terza cifra decimale, risulta

$$2,924 \leq y_{20} \leq 3,124.$$

Non abbiamo nessuna garanzia che y_{20} sia non inferiore a 3 milioni di euro.

SOLUZIONE DEL QUESITO 1
CORSO DI ORDINAMENTO 2011



E' dato un cilindro inscritto in una sfera di raggio $AO = 60$ cm. Indichiamo con x l'altezza BC (omettiamo per comodità l'unità di misura): $\overline{BC} = x$, $0 < x < 120$.

Applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo ABC :

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{CB}^2 \quad \Rightarrow \quad \overline{AB}^2 = 120^2 - x^2.$$

Determiniamo il volume $V(x)$ del cilindro inscritto:

$$V = \pi \cdot \frac{\overline{AB}^2}{4} \cdot \overline{CB} \quad \Rightarrow \quad V(x) = \pi \cdot \frac{14400 - x^2}{4} \cdot x$$

$$V(x) = \frac{\pi}{4}(14400x - x^3), \quad 0 < x < 120.$$

Ricaviamo la derivata prima $V'(x)$ e studiamone il segno:

$$V'(x) = \frac{\pi}{4}(14400 - 3x^2) \quad \Rightarrow \quad V'(x) = \frac{3}{4}\pi(4800 - x^2),$$

$$V'(x) > 0 \quad \text{per} \quad 0 < x < 40\sqrt{3},$$

$$V'(x) < 0 \quad \text{per} \quad 40\sqrt{3} < x < 120,$$

$$V'(x) = 0 \quad \text{per} \quad x = 40\sqrt{3}.$$

Pertanto la funzione $V(x)$ ammette massimo per $x = 40\sqrt{3}$.

In $x = 40\sqrt{3}$, si ricava:

$$V_{\max} = V(40\sqrt{3}) = \frac{\pi}{4}(14400 \cdot 40\sqrt{3} - 64000 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{4}\pi \cdot 384000 = 96000\pi\sqrt{3}.$$

Introduciamo ora l'unità di misura. Si ha:

$$V_{\max} = 96000\pi\sqrt{3} \text{ cm}^3.$$

Poiché $1 \text{ cm}^3 = 10^{-3} \text{ l}$, la capacità in litri del serbatoio risulta:

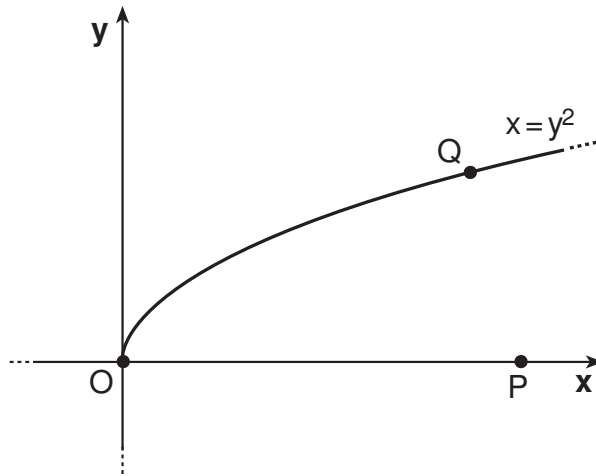
$$V_{\max} = 96\pi\sqrt{3} \text{ l} \simeq 522,371.$$

SOLUZIONE DEL QUESITO 2
CORSO DI ORDINAMENTO 2011

La curva di equazione $y = \sqrt{x}$ è un ramo di parabola, infatti tale equazione è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} x = y^2 \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Il punto di P di coordinate $(4; 0)$ non è un punto di tale curva.



Un generico punto Q della curva ha coordinate $Q(t^2; t)$ con $t \geq 0$. Calcoliamo la distanza di Q da P in funzione del parametro t :

$$\overline{QP}^2 = (t^2 - 4)^2 + t^2 = t^4 - 8t^2 + 16 + t^2 = t^4 - 7t^2 + 16.$$

I valori di t che rendono minimo \overline{QP} sono tutti e soli quelli che rendono minimo \overline{QP}^2 . Per semplicità, consideriamo allora

$$f(t) = t^4 - 7t^2 + 16, \text{ per } t \geq 0.$$

Per trovare il minimo di questa funzione, studiamo il segno della sua derivata:

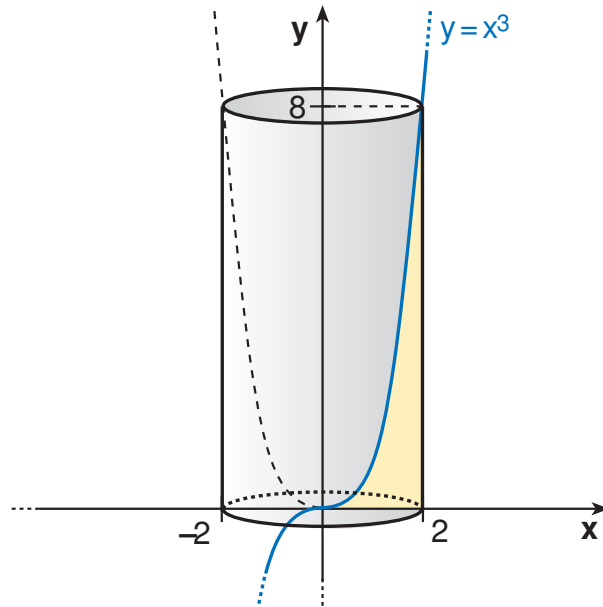
$$f'(t) = 4t^3 - 14t = 2t(2t^2 - 7).$$

Ricordando che t assume valori non negativi, la derivata è positiva per $t > \sqrt{\frac{7}{2}}$ e negativa per $0 < t < \sqrt{\frac{7}{2}}$. Ne segue che la funzione assume il valore minimo per $t = \sqrt{\frac{7}{2}} = \frac{\sqrt{14}}{2}$.

Il corrispondente punto Q sulla curva è, in conclusione, $Q\left(\frac{7}{2}; \frac{\sqrt{14}}{2}\right)$.

SOLUZIONE DEL QUESITO 3
CORSO DI ORDINAMENTO 2011

Rappresentiamo il solido di cui si chiede il volume:



Il solido W si ottiene dalla differenza tra il cilindro di altezza di misura 8 e raggio di base di misura 2, con il solido ottenuto dalla rotazione del ramo di curva $x = \sqrt[3]{y}$ attorno all'asse y . Calcoliamo i volumi di questi due solidi:

$$V_{\text{cilindro}} = \pi r^2 h = \pi \cdot 4 \cdot 8 = 32\pi$$

$$V_2 = \pi \int_0^8 (\sqrt[3]{y})^2 dy = \pi \left[\frac{y^{5/3}}{5/3} \right]_0^8 = \frac{3}{5} \pi \cdot 8^{5/3} = \frac{96}{5} \pi$$

In conclusione

$$V_W = 32\pi - \frac{96}{5}\pi = \frac{64}{5}\pi.$$

SOLUZIONE DEL QUESITO 4
CORSO DI ORDINAMENTO 2011

Risolviamo l'equazione:

$$C_{n,4} = C_{n,3}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Condizione di esistenza:

$$\begin{cases} n \geq 4 \\ n \geq 3 \end{cases} \Rightarrow n \geq 4.$$

Utilizziamo la formula

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!}, \quad \text{con } n \geq k :$$

$$C_{n,4} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{4!},$$

$$C_{n,3} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{3!}.$$

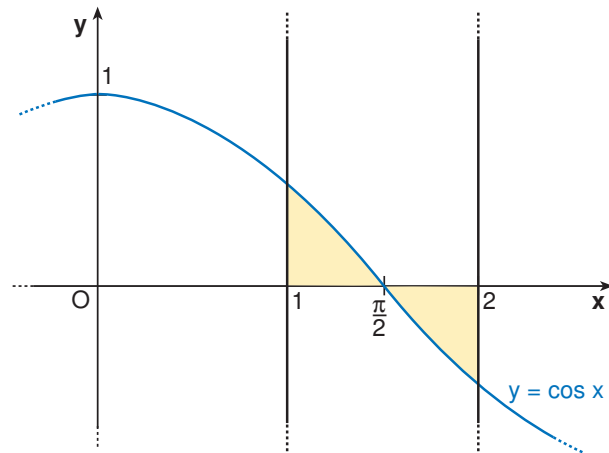
Uguagliamo:

$$\begin{aligned} \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{4 \cdot 3 \cdot 2} &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{3 \cdot 2} \\ \Rightarrow \frac{n-3}{4} &= 1 \end{aligned}$$

da cui si ottiene $n = 7$ come soluzione accettabile.

SOLUZIONE DEL QUESITO 5
CORSO DI ORDINAMENTO 2011

Rappresentiamo la regione considerata:



L'area richiesta è la somma delle due aree seguenti:

$$A_1 = \int_1^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = [\text{sen } x]_1^{\frac{\pi}{2}} = 1 - \text{sen } 1,$$

$$A_2 = - \int_{\frac{\pi}{2}}^2 \cos x dx = - [\text{sen } x]_{\frac{\pi}{2}}^2 = -\text{sen } 2 + 1.$$

In conclusione:

$$A = A_1 + A_2 = 1 - \text{sen } 1 - \text{sen } 2 + 1 = 2 - \text{sen } 1 - \text{sen } 2.$$

SOLUZIONE DEL QUESITO 6
CORSO DI ORDINAMENTO 2011

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a}{x - a} = \frac{0}{0} \quad (\text{forma indeterminata}).$$

Applichiamo la regola di De L'Hopital:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 a}.$$

Osservazione: Facendo un cambiamento di variabile $h = x - a$, risulta:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(a + h) - \operatorname{tg} a}{h}.$$

Si tratta del limite del rapporto incrementale della funzione tangente in $x = a$, cioè della derivata prima della funzione $f(x) = \operatorname{tg} x$ in $x = a$: $f'(a) = \frac{1}{\cos^2 a}$.

SOLUZIONE DEL QUESITO 7
CORSO DI ORDINAMENTO 2011

La funzione $f(x) = x^{2011} + 2011x + 12$ è continua in $[-1; 0]$ e derivabile in $] - 1; 0[$.

Calcoliamo i suoi valori agli estremi:

$$f(-1) = -1 - 2011 + 12 = -2000 < 0;$$

$$f(0) = 12 > 0.$$

Quindi $f(x)$ si annulla in almeno un punto compreso fra -1 e 0.

Calcoliamo il segno di $f'(x)$:

$$f'(x) = 2011x^{2010} + 2011 > 0$$

per ogni $x \in] - 1; 0[$.

Quindi $f(x)$ è una funzione monotona strettamente crescente e si annulla in uno e un solo punto compreso fra -1 e 0.

Consideriamo l'equazione associata:

$$x^{2011} + 2011x + 12 = 0;$$

per le proprietà della funzione associata sopra citate, l'equazione ammette una e una sola radice compresa fra -1 e 0.

<p style="text-align: center;">SOLUZIONE DEL QUESITO 8 CORSO DI ORDINAMENTO 2011</p>
--

Il problema della quadratura del cerchio fa parte della celebre famiglia di problemi classici che non possono essere risolti utilizzando soltanto riga (senza tacche) e compasso. Dato un cerchio, di centro e raggio noti, bisogna costruire un quadrato di area pari a quella del cerchio. Dal punto di vista algebrico, indicati con r il raggio del cerchio e con l il lato del quadrato da trovare, vale la relazione:

$$\pi \cdot r^2 = l^2 \rightarrow l = \sqrt{\pi} \cdot r.$$

Assunto per semplicità $r = 1$, si tratta di costruire un lato di misura $\sqrt{\pi}$. Nel 1882 fu dimostrata l'impossibilità di tale costruzione attraverso le regole euclidee di riga e compasso. L'impossibilità di tale costruzione deriva dal fatto che π è un numero trascendente.

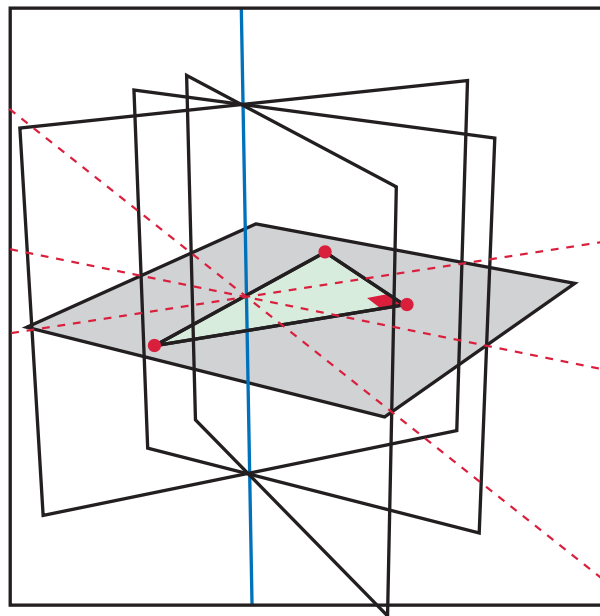
SOLUZIONE DEL QUESITO 9
CORSO DI ORDINAMENTO 2011

Proponiamo due metodi, il primo di geometria euclidea (sintetica) e il secondo di geometria analitica.

Metodo sintetico.

Ricordiamo che il luogo dei punti dello spazio equidistanti da due punti dati A e B è il *piano assiale* del segmento AB , ovvero il piano perpendicolare ad AB passante per il punto medio di AB .

Da ciò segue che il luogo cercato è l'intersezione dei piani assiali dei tre lati del triangolo. Tali piani si intersecano in effetti in una retta perpendicolare al piano π contenente il triangolo.



Prendiamo infatti due qualunque di tali piani assiali, diciamo α piano assiale del lato a e β piano assiale del lato b , allora α e β sono perpendicolari a π , e le loro intersezioni con π sono gli assi di a e b . L'intersezione di α e β è dunque una retta perpendicolare a π , passante per il circocentro del triangolo.

Ricordiamo infine che il circocentro di un triangolo rettangolo è il punto medio dell'ipotenusa.

Metodo analitico

Fissiamo un sistema di coordinate cartesiane nello spazio, in modo che i vertici del triangolo rettangolo siano i punti $O(0; 0; 0)$, $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$. Sia $P(x; y; z)$ un generico punto dello spazio. La condizione $\overline{AP} = \overline{BP} = \overline{OP}$ equivale alle equazioni:

$$(x - a)^2 + y^2 + z^2 = a^2 + (y - b)^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Semplificando, si ottengono le equazioni:

$$\begin{cases} x = \frac{a}{2} \\ y = \frac{b}{2} \end{cases}$$

che sono quelle della retta perpendicolare al piano del triangolo, $z = 0$, e passante per il punto $\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}; 0\right)$, che è il punto medio di AB .

SOLUZIONE DEL QUESITO 10
CORSO DI ORDINAMENTO 2011

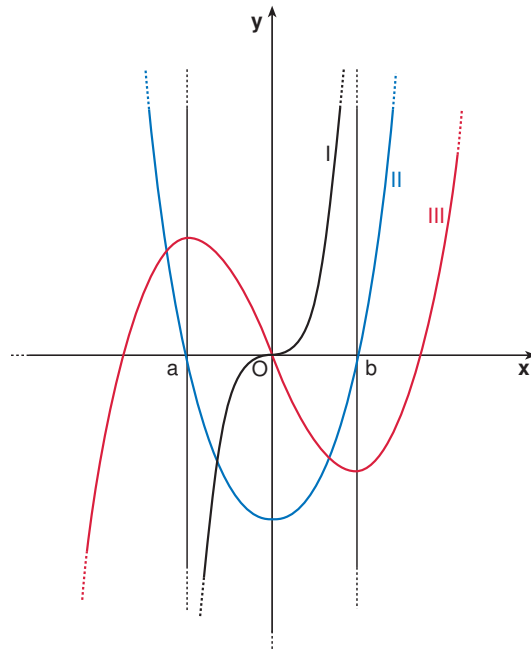
Possiamo subito escludere le alternative A) e B). Infatti, se il grafico di f fosse I, ne seguirebbe che, per $x > 0$, sia il grafico di f' sia quello di f'' dovrebbero trovarsi nel primo quadrante poiché f è, per ogni $x > 0$, strettamente crescente e con la concavità rivolta verso l'alto.

Anche l'alternativa C) non può essere corretta, poiché, per $x > 0$, la funzione II è crescente, mentre la funzione III assume tutti i valori negativi in corrispondenza di alcune ascisse positive.

Analogamente, escludiamo anche l'alternativa E), poiché vi è un intervallo in cui la funzione III decresce mentre il grafico I si mantiene nel semipiano delle ordinate positive.

L'unica alternativa plausibile è la D). Analizziamola in dettaglio.

Osserviamo innanzitutto che gli zeri del grafico II corrispondono ai punti di massimo e minimo locali di III. Indichiamoli con a e b .



Per $x < a$ e per $x > b$, la funzione III è crescente e quella II è positiva. Mentre, per $a < x < b$, la funzione III è decrescente e, coerentemente, la funzione II assume valori negativi. Ne segue che il grafico II è compatibile con quello della derivata prima della funzione III. Per quanto riguarda la derivata seconda, osserviamo che la funzione I è

positiva proprio per $x > 0$, cioè in corrispondenza dell'intervallo in cui il grafico III ha la concavità verso l'alto. Quest'ultima inoltre ha la concavità rivolta verso il basso proprio in corrispondenza delle ascisse per le quali la funzione I risulta negativa.

La risposta corretta è, in conclusione, la *D*).