ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. 2011

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti scelti nel questionario[1].

PROBLEMA 1

Sia f la funzione definita sull'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali da $f(x) = x + \ln 4 + \dfrac{2}{e^x + 1}$ e sia Γ la sua rappresentazione grafica nel sistema di riferimento Oxy.

1. Si determini il limite di $f(x)$ per x che tende a $+\infty$ e a $-\infty$. Si calcoli $f(x) + f(-x)$ e si spieghi perchè dal risultato si può dedurre che il punto $A(0; 1 + \ln 4)$ è centro di simmetria di Γ.

2. Si provi che, per tutti i reali m, l'equazione $f(x) = m$ ammette una e una sola soluzione in $\mathbb{R}$. Sia α la soluzione dell'equazione $f(x) = 3$; per quale valore di m il numero $-\alpha$ è soluzione dell'equazione $f(x) = m$?

3. Si provi che, per tutti gli x reali, è: $f(x) = x + 2 + \ln 4 - \dfrac{2e^x}{e^x + 1}$.Si provi altresì che la retta r di equazione $y = x + \ln 4$ e la retta s di equazione $y = x + 2 + \ln 4$ sono asintoti di Γ e che Γ è interamente compresa nella striscia piana delimitata da r e da s.

4. Posto $I(\beta) = \int_0^\beta [f(x) - x - \ln 4]dx$, si calcoli: $\lim\limits_{\beta \to +\infty} I(\beta)$. Qual è il significato geometrico del risultato ottenuto?

PROBLEMA 2

Per il progetto di una piscina, un architetto si ispira alle funzioni f e g definite, per tutti gli x reali, da:

$$f(x) = x^3 - 16x \qquad \text{e} \qquad g(x) = sen\,\frac{\pi}{2}x$$

[1]Durata della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

1. Si studino le funzioni f e g e se ne disegnino i rispettivi grafici in un conveniente sistema di riferimento cartesiano Oxy. Si considerino i punti del grafico di g a tangente orizzontale la cui ascissa è compresa nell'intervallo $[-10; 10]$ e se ne indichino le coordinate.

2. L'architetto rappresenta la superficie libera dell'acqua nella piscina con la regione R delimitata dai grafici di f e di g sull'intervallo $[0; 4]$. Si calcoli l'area di R.

3. Ai bordi della piscina, nei punti di intersezione del contorno di R con le rette $y = -15$ e $y = -5$, l'architetto progetta di collocare dei fari per illuminare la superficie dell'acqua. Si calcolino le ascisse di tali punti (è sufficiente un'approssimazione a meno di 10^{-1}).

4. In ogni punto di R a distanza x dall'asse y, la misura della profondità dell'acqua nella piscina è data da $h(x) = 5 - x$. Quale sarà il volume d'acqua nella piscina? Quanti litri d'acqua saranno necessari per riempire la piscina se tutte le misure sono espresse in metri?

QUESTIONARIO

1. Silvia, che ha frequentato un indirizzo sperimentale di liceo scientifico, sta dicendo ad una sua amica che la *geometria euclidea* non è più vera perchè per descrivere la realtà del mondo che ci circonda occorrono modelli di *geometria non euclidea*. Silvia ha ragione? Si motivi la risposta.

2. Si trovi il punto della curva $y = \sqrt{x}$ più vicino al punto di coordinate $(4; 0)$.

3. Sia R la regione delimitata, per $x \in [0, \pi]$, dalla curva $y = \mathit{sen}\, x$ e dall'asse x e sia W il solido ottenuto dalla rotazione di R attorno all'asse y. Si calcoli il volume di W.

4. Il numero delle combinazioni di n oggetti a 4 a 4 è uguale al numero delle combinazioni degli stessi oggetti a 3 a 3. Si trovi n.

5. In una delle sue opere G. Galilei fa porre da Salviati, uno dei personaggi, la seguente questione riguardante l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali ("i numeri tutti"). Dice Salviati: ≪...se io dirò, i numeri tutti, comprendono i quadrati e i non quadrati,

esser più che i quadrati soli, dirò proposizione verissima: non è così?≫. Come si può rispondere all'interrogativo posto e con quali argomentazioni?

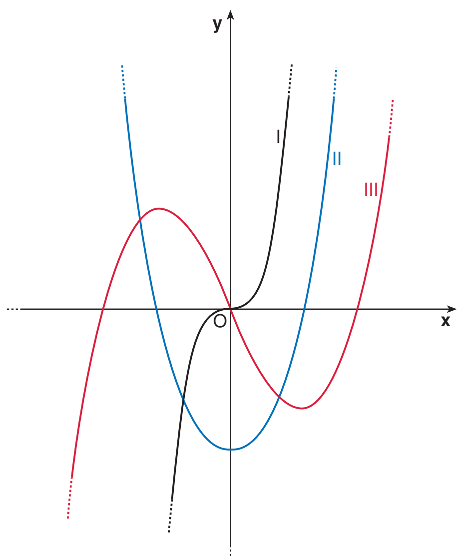
6. Di tutti i coni inscritti in una sfera di raggio 10 cm, qual è quello di superficie laterale massima?

7. Un test d'esame consta di dieci domande, per ciascuna delle quali si deve scegliere l'unica risposta corretta fra quattro alternative. Qual è la probabilità che, rispondendo a caso alle dieci domande, almeno due risposte risultino corrette?

8. In che cosa consiste il problema della *quadratura del cerchio*? Perché è citato così spesso?

9. Si provi che, nello spazio ordinario a tre dimensioni, il luogo geometrico dei punti equidistanti dai tre vertici di un triangolo rettangolo è la retta perpendicolare al piano del triangolo passante per il punto medio dell'ipotenusa.

10. Nella figura sotto, denotati con I, II e III, sono disegnati tre grafici.



Uno di essi è il grafico di una funzione f, un altro lo è della funzione derivata f' e l'altro ancora di f''. Quale delle seguenti alternative identifica correttamente ciascuno dei tre grafici?

	f	f'	f''
$A)$	I	II	III
$B)$	I	III	II
$C)$	II	III	I
$D)$	III	II	I
$E)$	III	I	II

Si motivi la risposta.

SOLUZIONE DEL PROBLEMA 1
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. 2011

1. Poiché $e^x + 1$ è strettamente positivo per ogni x reale, il dominio della funzione

$$f(x) = x + \ln 4 + \frac{2}{e^x + 1}$$

è $\mathbb{R}$: possiamo dunque studiare i limiti all'infinito.

Ricordando che

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0,$$

risulta che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{e^x+1} = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{e^x+1} = 2,$$

Applicando i teoremi sul calcolo dei limiti segue subito che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

Calcoliamo $f(x) + f(-x)$:

$$\begin{aligned} f(x) + f(-x) &= x + \ln 4 + \frac{2}{e^x+1} - x + \ln 4 + \frac{2}{e^{-x}+1} = \\ &= 2\ln 4 + \frac{2}{e^x+1} + \frac{2e^x}{e^x+1} = \\ &= 2\left(\ln 4 + \frac{1+e^x}{1+e^x}\right) \\ &= 2(\ln 4 + 1). \end{aligned}$$

Ricordiamo che il punto $P(x; y)$ corrisponde nella simmetria di centro A al punto $P'(x'; y')$ se A è il punto medio del segmento PP', cioè se

$$\frac{x+x'}{2} = x_A, \qquad \frac{y+y'}{2} = y_A.$$

Nel nostro caso, preso un generico punto P del grafico, di coordinate $(x; f(x))$, anche il punto P' di coordinate $(-x; f(-x))$ appartiene a Γ, e tale coppia di punti soddisfa le equazioni della simmetria di centro $A(0; \ln 4 + 1)$. Infatti:

$$\frac{x+x'}{2} = \frac{x-x}{2} = 0, \qquad \frac{y+y'}{2} = \frac{f(x)+f(-x)}{2} = \ln 4 + 1$$

2. Osserviamo che la funzione $g(x) = f(x) - m$ è continua e ha limite rispettivamente $+\infty$ e $-\infty$ per $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$, perciò, dal teorema di esistenza degli zeri per le funzioni continue, esiste almeno un valore di x per cui $f(x) - m = 0$, e quindi $f(x) = m$. D'altra parte, la funzione $f(x)$ è strettamente crescente, perché la sua derivata è strettamente positiva per ogni $x \in \mathbb{R}$. Infatti:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + 2\left[-\frac{e^x}{(e^x+1)^2}\right] = \\ &= 1 - \frac{2e^x}{(e^x+1)^2} = \\ &= \frac{e^{2x} + 1 + 2e^x - 2e^x}{(e^x+1)^2} = \\ &= \frac{e^{2x}+1}{(e^x+1)^2} > 0. \end{aligned}$$

Per quanto visto nel punto 1, si ha $f(\alpha) + f(-\alpha) = 2(\ln 4 + 1)$, da cui si deduce che

$$f(-\alpha) = -f(\alpha) + 2(\ln 4 + 1) = -3 + 2(\ln 4 + 1) = 2\ln 4 - 1.$$

In conclusione, il valore di m richiesto è $m = 2\ln 4 - 1$

3. Sempre dalla relazione tra $f(x)$ e $f(-x)$ trovata nel punto 1, segue che

$$\begin{aligned} f(x) &= 2(\ln 4 + 1) - f(-x) = \\ &= 2\ln 4 + 2 - \left(-x + \ln 4 + \frac{2}{e^{-x}+1}\right) = \\ &= 2\ln 4 + 2 + x - \ln 4 - \frac{2}{e^{-x}+1} = \\ &= x + 2 + \ln 4 - \frac{2e^x}{e^x+1}. \end{aligned}$$

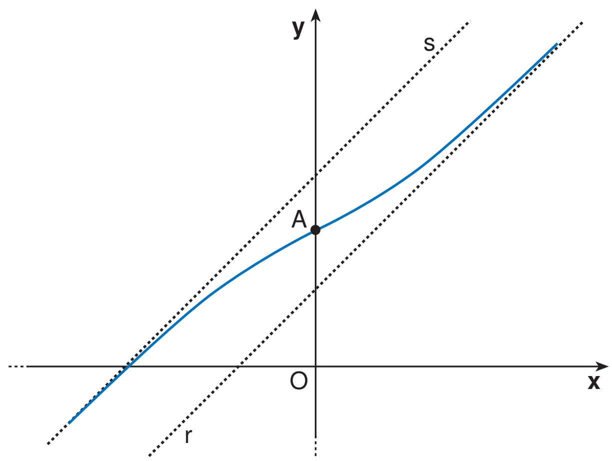
Cerchiamo gli asintoti di $f(x)$, e verifichiamo che essi coincidono con le rette r e s. Gli eventuali asintoti di $f(x)$ hanno coefficiente angolare pari al limite:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \left[1 + \frac{\ln 4}{x} + \frac{2}{x(e^x+1)}\right] = 1,$$

e intercette pari ai limiti:

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\ln 4 + \frac{2}{e^x+1}\right) = \ln 4$$

$$\lim_{x\to-\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to-\infty} \left(\ln 4 + \frac{2}{e^x+1}\right) = 2 + \ln 4.$$



Questi sono i valori del coefficiente angolare e delle intercette delle rette r e s.

Per dimostrare che Γ è interamente contenuta nella striscia piana compresa tra r e s, confrontiamo $f(x)$ con le equazioni degli asintoti.

Osserviamo che, essendo $e^x + 1 > 0$,

$$f(x) = x + \ln 4 + \frac{2}{e^x + 1} > x + \ln 4$$

e quindi Γ sta al di sopra della retta r. D'altro canto, per quanto visto sopra,

$$f(x) = x + 2 + \ln 4 - \frac{2e^x}{e^x + 1} < x + 2 + \ln 4.$$

quindi Γ sta al di sotto della retta s. Da queste osservazioni segue quanto richiesto.

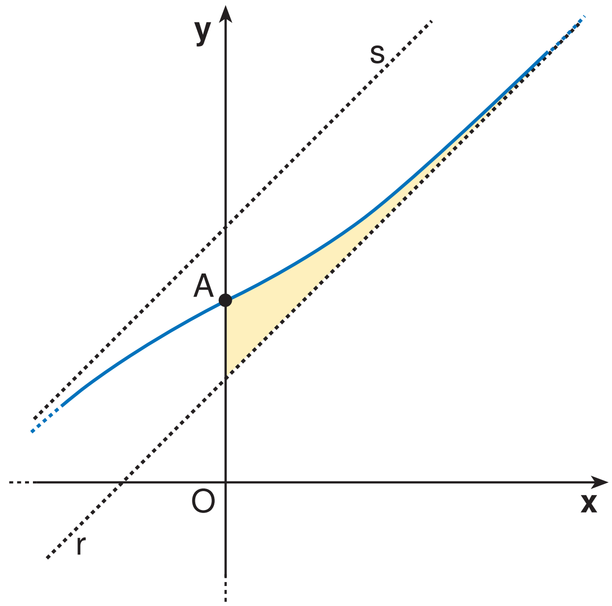
4. L'integrale $I(\beta)$ si può interpretare geometricamente come l'area della regione di piano delimitata dall'asse y, dalla retta di equazione $x = \beta$, dall'asintoto r e dal grafico Γ. Perciò, se il limite $\lim_{\beta \to +\infty} I_\beta$ è finito esso è uguale all'area compresa tra l'asse y, la curva Γ e la retta r.

   Passiamo al calcolo dell'integrale.

$$I(\beta) = \int_0^\beta [f(x) - x - \ln 4]\, dx = \int_0^\beta \frac{2}{e^x + 1}\, dx$$

   Calcoliamo l'integrale per sostituzione. Poniamo $t = e^x$, da cui $dx = \frac{1}{t} dt$:

$$I(\beta) = 2 \int_1^{e^\beta} \frac{1}{t(t+1)} dt.$$



La funzione integranda si può scrivere come somma di due frazioni aventi come denominatori t e $t+1$. Imponendo

$$\frac{1}{t(t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} = \frac{A + At + Bt}{t(t+1)},$$

e uguagliando i coefficienti dei numeratori si ottiene $A = 1$ e $B = -1$. L'integrale da calcolare è equivalente a

$$2\int_1^{e^\beta} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right) dt = 2[\ln t - \ln(t+1)]_1^{e^\beta} = 2\left[\ln\frac{t}{t+1}\right]_1^{e^\beta} = 2\ln\left(\frac{e^\beta}{e^\beta+1}\right) - 2\ln\frac{1}{2}.$$

Poiché $\lim\limits_{\beta\to+\infty} e^\beta = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right) = 0$, risulta

$$\lim_{\beta\to+\infty} I(\beta) = -2\ln\frac{1}{2} = \ln 4.$$

SOLUZIONE DEL PROBLEMA 2
CORSO SPERIMENTALE P.N.I 2011

1. Studio di $y = f(x)$:

   - $D_f = \mathbb{R}$.
   - Ricerca simmetrie: la funzione è dispari, infatti:

   $$f(-x) \;=\; -f(x)\,.$$

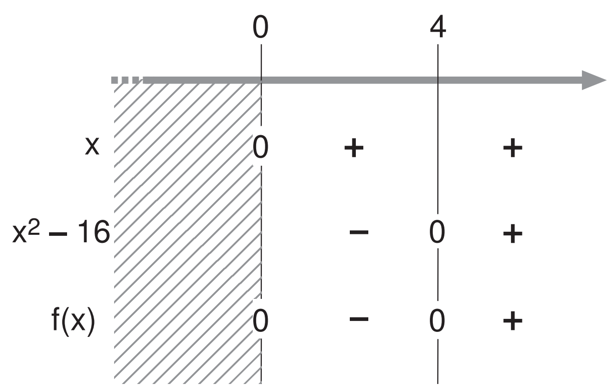
   Per questo motivo studiamo la funzione per $x \geq 0$; ricaveremo l'altra metà del grafico per simmetria rispetto all'origine O.

   - Punti di intersezione con gli assi coordinati: cominciamo con l'asse x:

   $$\begin{cases} y = 0 \\ y = f(x) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^3 - 16x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x(x^2 - 16) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \vee x = \pm 4 \end{cases}$$

   Ci sono tre punti di intersezione con l'asse x: $A_1(-4;0), A_2(0;0), A_3(4;0)$. Di queste, A_2 è intersezione di $y = f(x)$ anche con l'asse y.

   - Positività: $x(x^2 - 16) > 0$:



   Quindi la funzione $f(x)$ è positiva (in $x \geq 0$) per $x > 4$.

   - Comportamento della funzione agli estremi del dominio: non esistono asintoti verticali. Inoltre, poiché

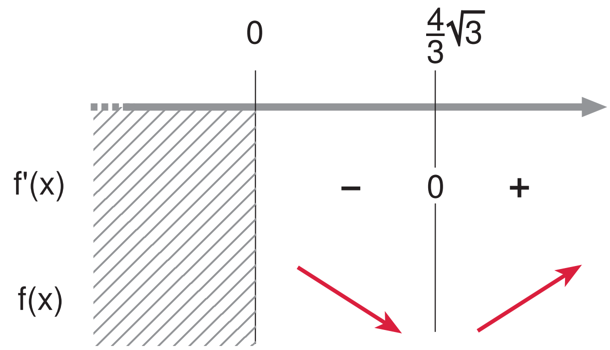
   $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty\,,$$

   non esistono asintoti orizzontali, né obliqui.

- Derivata prima:

$$f'(x) = 3x^2 - 16 \, .$$

Studio del segno di $f'(x)$:



Nell'intervallo di studio la funzione è crescente per $x > \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.
Tale valore individua un punto di minimo relativo, secondo lo schema del segno di $f'(x)$ sopra riportato; calcoliamo le sue coordinate:

$$f\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{64\sqrt{3}}{9} - \frac{64\sqrt{3}}{3} = -\frac{128\sqrt{3}}{9} \, .$$

Quindi il punto di minimo relativo è

$$M_1\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}; -\frac{128\sqrt{3}}{9}\right)$$

e per simmetria il punto

$$M_2\left(-\frac{4\sqrt{3}}{3}; \frac{128\sqrt{3}}{9}\right)$$

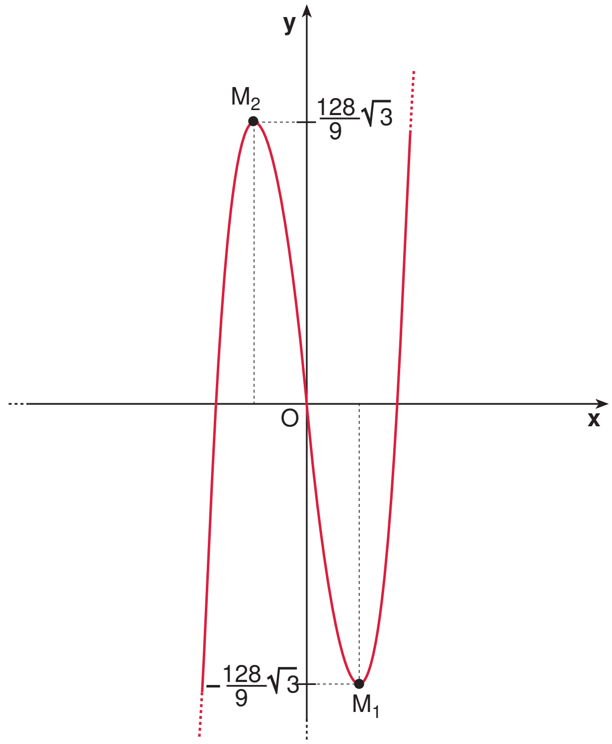
è punto di massimo relativo.

- Derivata seconda:

$$f''(x) = 6x \, .$$

Studio del segno di $f''(x)$: nell'intervallo di studio è evidente che $f''(x)$ è sempre non negativa. Pertanto in tale intervallo la funzione volge la concavità verso l'alto. Inoltre il punto $O(0; 0)$ in cui si annulla $f''(x)$ è un punto di flesso.

- Tracciamo il grafico G_f di $y = f(x)$, sfruttando la simmetria rispetto all'origine:



Studio di $g(x)$: tale funzione si ottiene da $y = \operatorname{sen} x$ mediante una contrazione orizzontale che porta il punto $(2\pi; 0)$ in $(4; 0)$.

I punti a tangente orizzontale del grafico di $y = \operatorname{sen} x$ nell'intervallo $[-5\pi; 5\pi]$ hanno coordinate

$$\left(\frac{2k+1}{2}\pi; (-1)^k\right) \qquad \text{per} \quad -5 \leq k \leq 4\,, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Di conseguenza i punti a tangente orizzontale del grafico G_g di $y = g(x)$ compresi nell'intervallo $[-10; 10]$ sono:

$$\left(2k+1; (-1)^k\right) \qquad \text{per} \quad -5 \leq k \leq 4\,, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

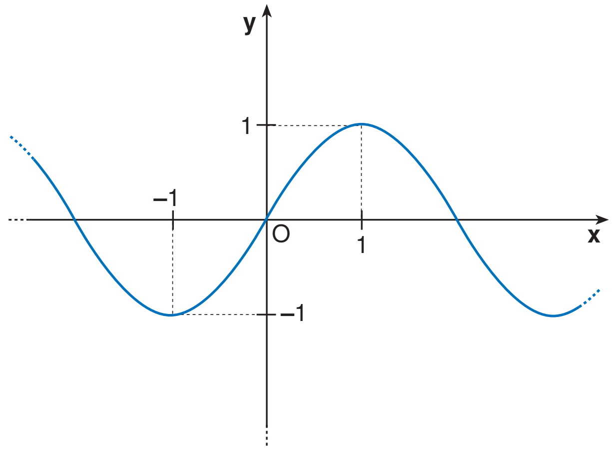
2. Individuiamo graficamente la regione R:

   L'area di R è il risultato dell'integrale

$$\int_0^4 [g(x) - f(x)]\, dx$$

   cioè

$$\int_0^4 \left[\operatorname{sen} \frac{\pi}{2}x - x^3 + 16x\right] dx \;\; = \left[-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}x - \frac{x^4}{4} + 8x^2\right]_0^4 = 64\,.$$



3. Rappresentiamo in figura:

   Risolviamo i seguenti sistemi:

$$\begin{cases} y = -15 \\ y = f(x) \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} y = -5 \\ y = f(x) \end{cases}$$

   Nel primo otteniamo

$$\begin{cases} y = -15 \\ x^3 - 16x + 15 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -3 \\ (x-1)(x^2 + x - 15) = 0 \end{cases}$$

   da cui si ricavano i punti:

$$A_1\,(1; -15)\ , \quad B\left(\frac{-1+\sqrt{61}}{2}; -15\right)\ , \quad C\left(\frac{-1-\sqrt{61}}{2}; -15\right)\ ;$$

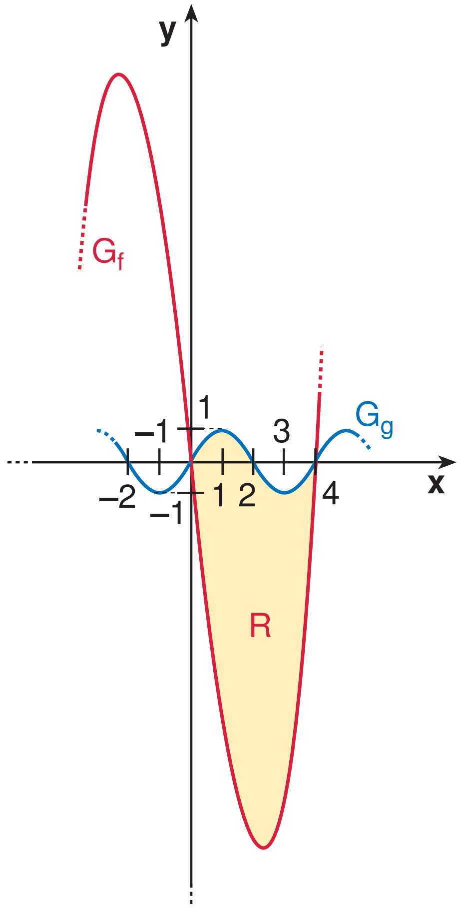
   di tali punti solo A e B si trovano sul bordo di R.

   Nel secondo sistema

$$\begin{cases} y = -5 \\ x^3 - 16x + 5 = 0 \end{cases}$$

   l'equazione di terzo grado ha radici non razionali; calcoliamo una loro approssimazione a meno di 10^{-1} come richiesto nell'intervallo $0 \leq x \leq 4$.

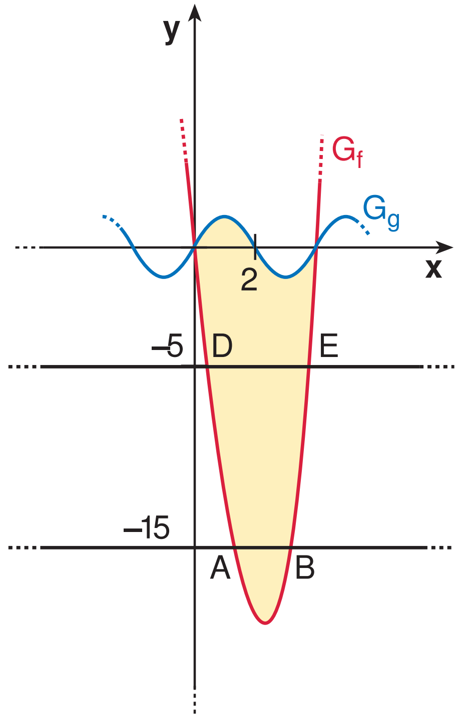
   Dal grafico deduciamo che una prima radice $\overline{x}_1$ ha ascissa compresa tra $x_1 = 0$ e $x_2 = 1$; infatti se denotiamo con $p(x)$ il polinomio $x^3 - 16x + 5$, allora $p(0) = 5$ e



$p(1) = -10$ e per il teorema di esistenza degli zeri, $p(x)$ possiede una radice nell'intervallo $]0; 1[$.

Ricaviamo la radice $\overline{x}_1$ mediante il metodo di bisezione:

$$x_1 = 0\,, \qquad p(x_1) = 5 > 0$$
$$x_2 = 1\,, \qquad p(x_2) = -10 < 0$$
$$\Rightarrow x_1 \;<\; \overline{x}_1 \;<\; x_2$$
$$x_3 = 0.5\,, \qquad p(x_3) = -\frac{23}{8} < 0$$
$$\Rightarrow x_1 \;<\; \overline{x}_1 \;<\; x_3$$
$$x_4 = 0.25\,, \qquad p(x_4) = \frac{65}{64} > 0$$
$$\Rightarrow x_4 \;<\; \overline{x}_1 \;<\; x_3$$
$$x_5 = 0.375\,, \qquad p(x_5) = -\frac{485}{512} < 0$$
$$\Rightarrow x_4 \;<\; \overline{x}_1 \;<\; x_5$$



$$x_6 = 0.3125\,, \qquad p(x_6) = \frac{125}{4096} > 0$$

$$\Rightarrow x_6 \, < \, \overline{x}_1 \, < \, x_5 \, \Rightarrow \, 0.3125 \, < \, \overline{x}_1 \, < \, 0.375\,.$$

Per quanto riguarda la seconda radice $\overline{x}_2$, la ricaviamo mediante il metodo delle tangenti, assumendo come punto iniziale $x_0 = 4$.

$$x_1 = x_0 - \frac{p(x_0)}{p'(x_0)} = 4 - \frac{5}{32} \simeq 3.844$$

$$x_2 = x_1 - \frac{p(x_1)}{p'(x_1)} \simeq 3.833$$

$$\Rightarrow \quad x_2 \, < \, \overline{x}_2 \, < \, x_1 \quad \Rightarrow \quad 3.833 \, < \, \overline{x}_2 \, < \, 3.844\,.$$

4. Il volume d'acqua della piscina può essere calcolato nel modo seguente: sezioniamo il solido in esame con piani del tipo $x = x_0$ perpendicolari alla superficie della vasca e paralleli all'asse y. Otteniamo dei rettangoli di area

$$S(x_0) = [g(x_0) - f(x_0)] \cdot h(x_0)\,.$$

Quindi il volume della vasca espresso in m^3 è equivalente al valore dell'integrale definito:

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^4 S(x)dx = \int_0^4 \left[\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}x - x^3 + 16x\right] \cdot (5-x)dx = \\
&= 5\int_0^4 \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}xdx - \int_0^4 x\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}xdx + \int_0^4 \left(-5x^3 + x^4 + 80x - 16x^2\right)dx = \\
&= \left[-\frac{10}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}x - \frac{5}{4}x^4 + \frac{x^5}{5} + 40x^2 - \frac{16}{3}x^3\right]_0^4 - \int_0^4 x\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}xdx = \\
&= \frac{2752}{15} - \int_0^4 x\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}xdx\,.
\end{aligned}$$

L'integrale $\int_0^4 x\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}xdx$ può essere risolto per parti secondo la formula

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

e ponendo

$$f(x) = x\,, \qquad g'(x) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}x\,.$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\int_0^4 x\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}xdx &= \left[-\frac{2x}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}x\right]_0^4 + \int_0^4 \frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}xdx \\
&= -\frac{8}{\pi} + \left[\frac{4}{\pi^2}\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}x\right]_0^4 = -\frac{8}{\pi}\,.
\end{aligned}$$

In conclusione, sostituendo nell'espressione del volume V si ottiene:

$$V = \frac{2752\pi + 120}{15\pi}m^3$$

e perciò la capacità della piscina è di circa

$$186013.15l\,.$$

SOLUZIONE DEL QUESITO 1
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. 2011

Fino all'inizio del 1800 la geometria euclidea, insieme ala teoria della meccanica newtoniana, furono alla base della conoscenza scientifica. La scoperta delle geometrie non euclidee ha rivoluzionato la concezione del rapporto tra geometria e realtà: le geometrie non euclidee si svilupparono nel XIX secolo, quando i ripetuti fallimenti dei tentativi di ricavare il V postulato di Euclide dagli altri quattro, portarono i matematici a elaborare dei nuovi modelli coerenti in cui il V postulato veniva sostituita da una sua negazione. In tal modo nacquero la geometria iperbolica di Lobačevskij e Bolyai e le geometrie sferica ed ellittica: nella geomteria iperbolica, dati una retta e un punto esterno a essa, è possibile condurre per quel punto infinite rette che non intersecano la retta data. Nelle geometrie sferica ed ellittica, oltre alla negazione del V postulato, sono introdotte delle modifiche più ampie dell'edificio euclideo; in particolare per un punto esterno a una retta non passa alcuna retta parallela a una retta data.

La scoperta di una pluralità di geometrie ha portato i fisici a chiedersi quale fosse la più adatta alla descrizione dello spazio fisico, il quale non poteva più essere considerato necessariamente euclideo. Infatti la teoria della relatività generale di Einstein ha proposto nel 1916 una nuova teoria della gravitazione che prevede uno spazio che può essere globalmente curvo e deve essere localmente curvo. Il problema della eventuale curvatura globale dello spazio è divenuto fondamentale per la moderna cosmologia: in questo contesto la relatività generale ammette sia la soluzione euclidea, sia soluzioni di tipo non euclideo. Il verificarsi di una o delle altre dipende dalla densità di materia dell'universo: ad esempio lo spazio è incurvato dalla massa del Sole e la luce, passando nelle sue vicinanze, percorre delle linee che non coincidono con le rette euclidee.

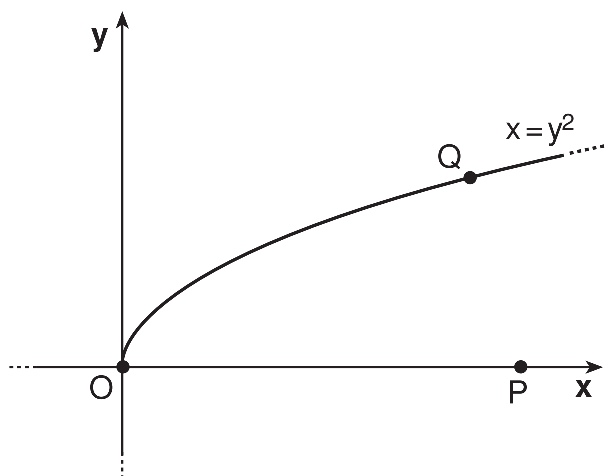
In definitiva Silvia ha torto: non esiste un modello geometrico globale migliore degli altri. Esistono solo modelli che meglio si adattano alle diverse soluzioni locali.

SOLUZIONE DEL QUESITO 2
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. 2011

La curva di equazione $y = \sqrt{x}$ è un ramo di parabola, infatti tale equazione è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} x = y^2 \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Il punto di P di coordinate $(4; 0)$ non è un punto di tale curva.



Un generico punto Q della curva ha coordinate $Q(t^2; t)$ con $t \geq 0$. Calcoliamo la distanza di Q da P in funzione del parametro t:

$$\overline{QP}^2 = (t^2 - 4)^2 + t^2 = t^4 - 8t^2 + 16 + t^2 = t^4 - 7t^2 + 16.$$

I valori di t che rendono minimo $\overline{QP}$ sono tutti e soli quelli che rendono minimo $\overline{QP}^2$. Per semplicità, consideriamo allora

$$f(t) = t^4 - 7t^2 + 16, \text{ per } t \geq 0.$$

Per trovare il minimo di questa funzione, studiamo il segno della sua derivata:

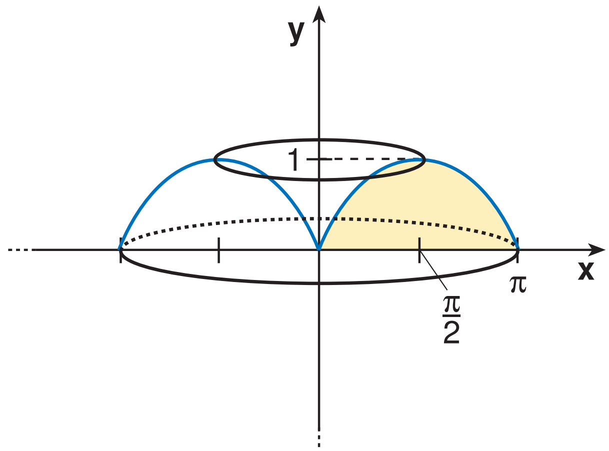
$$f'(t) = 4t^3 - 14t = 2t(2t^2 - 7).$$

Ricordando che t assume valori non negativi, la derivata è positiva per $t > \sqrt{\frac{7}{2}}$ e negativa per $0 < t < \sqrt{\frac{7}{2}}$. Ne segue che la funzione assume il valore minimo per $t = \sqrt{\frac{7}{2}} = \frac{\sqrt{14}}{2}$.

Il corrispondente punto Q sulla curva è, in conclusione, $Q\left(\frac{7}{2}; \frac{\sqrt{14}}{2}\right)$.

SOLUZIONE DEL QUESITO 3
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. 2011

Rappresentiamo la regione R e il solido W.



Consideriamo le funzioni:

$$f(x) = \operatorname{sen} x, \quad \text{nel dominio } \left[0; \frac{\pi}{2}\right];$$

$$g(x) = \operatorname{sen} x, \quad \text{nel dominio } \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right].$$

Il codominio di entrambe le funzioni è l'intervallo $[0; 1]$.

Il solido W è la differenza dei due solidi delimitati dalle superfici di rotazione generate dai grafici di f e di g attorno all'asse y.

Entrambe le funzioni f e g sono invertibili, e occorre esplicitare le loro funzioni inverse poiché, per calcolare i volumi, occorrerà integrare rispetto ad y.

Per fare questo, occorre ricordare che le soluzioni con $x \in [0; \pi]$ dell'equazione $\operatorname{sen} x = y$ (con $y \in [0; 1]$) sono $x_1 = \operatorname{arcsen} y$ e $x_2 = \pi - \operatorname{arcsen} y$. Dunque:

$$f^{-1}(y) = \operatorname{arcsen} y, \qquad g^{-1}(y) = \pi - \operatorname{arcsen} y.$$

Passiamo ora al calcolo del volume:

$$\begin{aligned} V_W &= \pi \int_0^1 (\pi - \operatorname{arcsen} y)^2 dy - \pi \int_0^1 \operatorname{arcsen}^2 y \, dy = \\ &= \pi \int_0^1 \left[(\pi - \operatorname{arcsen} y)^2 - \operatorname{arcsen}^2 y\right] dy = \\ &= \pi \int_0^1 (\pi^2 - 2\pi \operatorname{arcsen} y) \, dy. \end{aligned}$$

L'integrale $\int_0^1 \operatorname{arcsen} y \, dy$ può essere calcolato per parti:

$$\begin{aligned}\int_0^1 1 \cdot \operatorname{arcsen} y \, dy &= [\, y \operatorname{arcsen} y]_0^1 - \int_0^1 y \cdot \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \, dy = \\ &= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) \int_0^1 (-2y) \cdot (1-y^2)^{-\frac{1}{2}} \, dy = \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \left[2(1-y^2)^{\frac{1}{2}}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1.\end{aligned}$$

Tornando all'integrale per il calcolo del volume:

$$\begin{aligned}V_W &= \pi \left(\int_0^1 \pi^2 dy - 2\pi \int_0^1 \operatorname{arcsen} y \, dy \right) = \\ &= \pi \left[\pi^2 - 2\pi \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \right] = \\ &= \pi^3 - \pi^3 + 2\pi^2 = 2\pi^2.\end{aligned}$$

Il volume del solido è dunque $2\pi^2$.

SOLUZIONE DEL QUESITO 4
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. 2011

Risolviamo l'equazione:

$$C_{n,4} = C_{n,3}, \; n \in \mathbb{N}.$$

Condizione di esistenza:

$$\begin{cases} n \geq 4 \\ n \geq 3 \end{cases} \Rightarrow n \geq 4.$$

Utilizziamo la formula

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}, \text{ con } n \geq k:$$

$$\begin{aligned} C_{n,4} &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{4!}, \\ C_{n,3} &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{3!}. \end{aligned}$$

Uguagliamo:

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{3 \cdot 2}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{n-3}{4} = 1$$

da cui si ottiene $n = 7$ come soluzione accettabile.

SOLUZIONE DEL QUESITO 5
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. 2011

È evidente che l'insieme dei numeri naturali che sono dei quadrati perfetti costituisce un sottoinsieme proprio dell'insieme dei numeri naturali. In tal senso, si sarebbe portati a concludere "i numeri tutti, quadrati e non quadrati, essere più che i quadrati soli".

D'altra parte, è anche evidente ritenere che due insiemi che si possono porre in corrispondenza biunivoca abbiano "lo stesso numero di elementi". Una tale corrispondenza esiste tra l'insieme dei numeri naturali e l'insieme di quadrati:

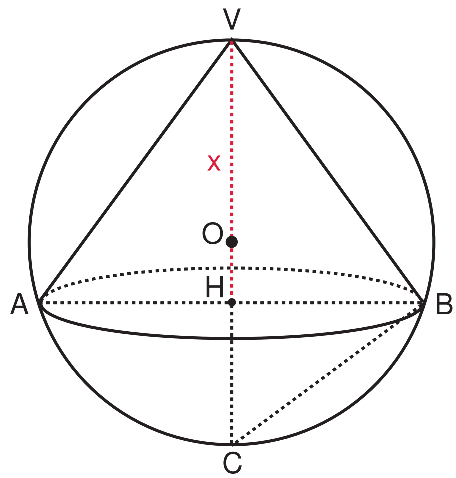
$$n \mapsto n^2,$$

ovvero, a un numero naturale n corrisponde uno e un solo n^2. In tal senso, non si può certo dire che "i numeri tutti, quadrati e non quadrati" siano "più che i quadrati soli".

L'apparente contraddizione si spiega con il diverso significato della parola "più" nel primo e nel secondo caso. Nel primo caso i due insiemi sono ordinati per *inclusione*, mentre nel secondo sono ordinati per *cardinalità*.

SOLUZIONE DEL QUESITO 6
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. 2011

Rappresentiamo il solido di cui si chiede il volume:



Dato un cono inscritto nella sfera di centro O e raggio 10 cm, indichiamo con x l'altezza VH del cono (omettiamo per comodità l'unità di misura): $\overline{VH} = x$, $0 < x < 20$.

Applicando i teoremi di Euclide al triangolo rettangolo VCB, otteniamo:

$$\overline{VB} = \sqrt{\overline{VC} \cdot \overline{VH}} \quad \Rightarrow \quad \overline{VB} = \sqrt{20x},$$

$$\overline{HB} = \sqrt{\overline{VH} \cdot \overline{HC}} \quad \Rightarrow \quad \overline{HB} = \sqrt{x(20-x)}.$$

Troviamo la superficie laterale del cono:

$$S_l = \frac{2\pi \cdot \overline{HB} \cdot \overline{VB}}{2} = \pi \cdot \overline{HB} \cdot \overline{VB}.$$

Sostituiamo le espressioni precedenti:

$$S_l(x) = \pi\sqrt{x(20-x)} \cdot \sqrt{20x} = \pi\sqrt{400x^2 - 20x^3} = 20\pi\sqrt{x^2 - \frac{x^3}{20}},\ 0 < x < 20.$$

Studiamo la derivata prima della funzione $S_l(x)$ e il suo segno:

$$S_l'(x) = 10\pi\frac{2x - \dfrac{3}{20}x^2}{\sqrt{x^2 - \dfrac{x^3}{20}}}.$$

$$
\begin{aligned}
S_l'(x) > 0 &\quad \text{per} \quad 0 < x < \frac{40}{3},\\
S_l'(x) < 0 &\quad \text{per} \quad \frac{40}{3} < x < 20,\\
S_l'(x) = 0 &\quad \text{per} \quad x = \frac{40}{3}.
\end{aligned}
$$

Pertanto la funzione $S_l(x)$ ha massimo in $x = \dfrac{40}{3}$, ovvero quando l'altezza è pari a $\overline{VH} = \dfrac{40}{3}\,\text{cm}$.

SOLUZIONE DEL QUESITO 7
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. 2011

Consideriamo i seguenti eventi:

$E_0 =$"nessuna quaterna è corretta",

$E_1 =$"una quaterna è corretta",

$E =$"almeno due quaterne sono corrette".

La probabilità dell'evento E risulta:

$$P(E) = 1 - P(E_0) - P(E_1).$$

Visto che

$$P(E_0) = \frac{3^{10}}{4^{10}},$$
$$P(E_1) = 10 \cdot \frac{3^9}{4^{10}},$$

allora

$$P(E) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{10} - \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{9} \simeq 0,75597.$$

SOLUZIONE DEL QUESITO 8
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. 2011

Il problema della quadratura del cerchio fa parte della celebre famiglia di problemi classici che non possono essere risolti utilizzando soltanto riga (senza tacche) e compasso. Dato un cerchio, di centro e raggio noti, bisogna costruire un quadrato di area pari a quella del cerchio. Dal punto di vista algebrico, indicati con r il raggio del cerchio e con l il lato del quadrato da trovare, vale la relazione:

$$\pi \cdot r^2 = l^2 \rightarrow l = \sqrt{\pi} \cdot r.$$

Assunto per semplicità $r = 1$, si tratta di costruire un lato di misura $\sqrt{\pi}$. Nel 1882 fu dimostrata l'impossibilità di tale costruzione attraverso le regole euclidee di riga e compasso. L'impossibilità di tale costruzione deriva dal fatto che π è un numero trascendente.

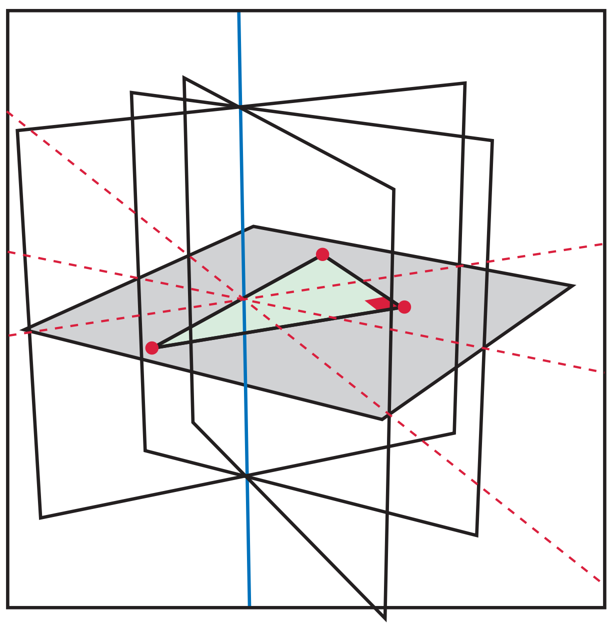
SOLUZIONE DEL QUESITO 9
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. 2011

Proponiamo due metodi, il primo di geometria euclidea (sintetica) e il secondo di geometria analitica.

Metodo sintetico.

Ricordiamo che il luogo dei punti dello spazio equidistanti da due punti dati A e B è il *piano assiale* del segmento AB, ovvero il piano perpendicolare ad AB passante per il punto medio di AB.

Da ciò segue che il luogo cercato è l'intersezione dei piani assiali dei tre lati del triangolo. Tali piani si intersecano in effetti in una retta perpendicolare al piano π contenente il triangolo.



Prendiamo infatti due qualunque di tali piani assiali, diciamo α piano assiale del lato a e β piano assiale del lato b, allora α e β sono perpendicolari a π, e le loro intersezioni con π sono gli assi di a e b. L'intersezione di α e β è dunque una retta perpendicolare a π, passante per l'ortocentro del triangolo.

Ricordiamo infine che l'ortocentro di un triangolo rettangolo è il punto medio dell'ipotenusa.

Metodo analitico

Fissiamo un sistema di coordinate cartesiane nello spazio, in modo che i vertici del triangolo rettangolo siano i punti $O(0; 0; 0)$, $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$. Sia $P(x; y; z)$ un generico punto dello spazio. La condizione $\overline{AP} = \overline{BP} = \overline{OP}$ equivale alle equazioni:

$$(x-a)^2 + y^2 + z^2 = a^2 + (y-b)^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Semplificando, si ottengono le equazioni:

$$\begin{cases} x = \dfrac{a}{2} \\ y = \dfrac{b}{2} \end{cases}$$

che sono quelle della retta perpendicolare al piano del triangolo, $z = 0$, e passante per il punto $\left(\dfrac{a}{2}; \dfrac{b}{2}; 0\right)$, che è il punto medio di AB.

SOLUZIONE DEL QUESITO 10
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. 2011

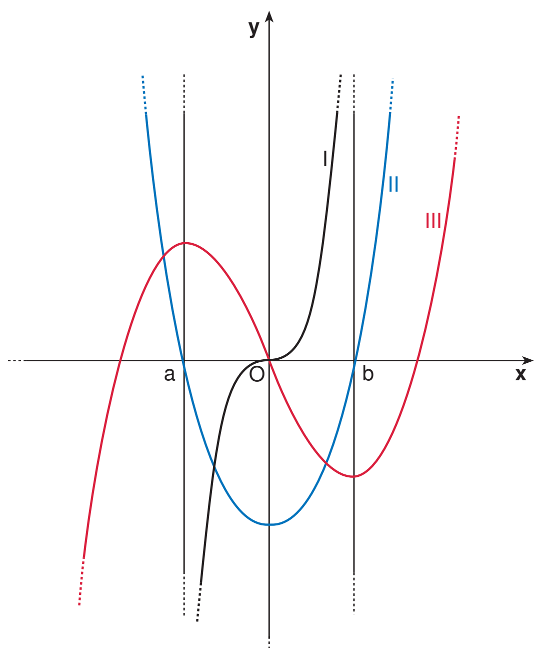
Possiamo subito escludere le alternative $A)$ e $B)$. Infatti, se il grafico di f fosse I, ne seguirebbe che, per $x > 0$, sia il grafico di f' sia quello di f'' dovrebbero trovarsi nel primo quadrante poiché f è, per ogni $x > 0$, strettamente crescente e con la concavità rivolta verso l'alto.

Anche l'alternativa $C)$ non può essere corretta, poiché, per $x > 0$, la funzione II è crescente, mentre la funzione III assume tutti i valori negativi in corrispondenza di alcune ascisse positive.

Analogamente, escludiamo anche l'alternativa $E)$, poiché vi è un intervallo in cui la funzione III decresce mentre il grafico I si mantiene nel semipiano delle ordinate positive.

L'unica alternativa plausibile è la $D)$. Analizziamola in dettaglio.

Osserviamo innanzitutto che gli zeri del grafico II corrispondono ai punti di massimo e minimo locali di III. Indichiamoli con a e b.



Per $x < a$ e per $x > b$, la funzione III è crescente e quella II è positiva. Mentre, per $a < x < b$, la funzione III è decrescente e, coerentemente, la funzione II assume valori negativi. Ne segue che il grafico II è compatibile con quello della derivata prima della funzione III. Per quanto riguarda la derivata seconda, osserviamo che la funzione I è positiva proprio per $x > 0$, cioè in corrispondenza dell'intervallo in cui il grafico III ha la concavità verso l'alto. Quest'ultima inoltre ha la concavità rivolta verso il basso proprio in corrispondenza delle ascisse per le quali la funzione I risulta negativa.

La risposta corretta è, in conclusione, la D).

