

SIMULAZIONE DI PROVA D'ESAME CORSO DI ORDINAMENTO

Risolvi uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Considera la famiglia di funzioni

$$f_k(x) = \begin{cases} k \ln x^x & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad k > 0$$

e la funzione $g(x) = \begin{cases} \ln x^{x^2} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$.

1. Determina per quale valore di k la funzione f_k e g hanno la stessa tangente nel punto di ascissa 1.
2. Detta f la funzione determinata al punto precedente, studia la continuità e la derivabilità di f e g nel punto $x = 0$.
3. Studia le funzioni f e g e disegna i grafici riferiti allo stesso sistema cartesiano ortogonale.
4. Calcola l'area della regione finita di piano delimitata da f e da g , appartenente al semipiano $x \geq \frac{1}{4}$.

PROBLEMA 2

In una circonferenza di diametro $\overline{AD} = 2r$ è inscritto il triangolo isoscele ABC di base BC . Costruisci la piramide che ha per base il triangolo ABC e altezza il segmento AV congruente a BC .

1. Posto $\overline{AH} = x$, essendo H il punto medio del segmento BC , determina la funzione $y = f(x)$ che esprime il volume della piramide $ABCV$.
2. Disegna il grafico di f e determina per quale valore di x il volume della piramide è massimo.
3. In corrispondenza di tale valore determina l'angolo formato dalle facce ABC e VBC .
4. Se y_0 è il valore del volume massimo, calcola l'area della regione finita di piano appartenente al semipiano $x \geq 0$, delimitata dalla funzione f e dalla sua simmetrica rispetto alla retta di equazione $y = y_0$.

QUESTIONARIO

- 1** Determina un'espressione generale delle coppie di numeri interi relativi che risolvono l'equazione:

$$3x + 5y = 6.$$

- 2** L'equazione $|x^2 - 1| + |4 - y^2| = 0$ nel piano cartesiano determina:

- a) due rami di iperbole.
- b) l'unione di un ramo di iperbole con un arco di circonferenza.

- c) due punti soltanto.
- d) l'insieme vuoto.
- e) quattro punti soltanto.

Soltanto una delle alternative proposte è giusta.
Rispondi dando adeguata motivazione.

3 La proposizione: «un cono è equivalente a una piramide con base equivalente e altezza congruente a quella del cono» è vera o falsa? Motiva adeguatamente la risposta.

4 Determina la funzione $y=f(x)$ sapendo che:

$$y'' = -5e^{-x}, \quad y'(0) = 5, \quad y(1) = 5 - \frac{5}{e}.$$

5 Sia data la funzione

$$f: A \rightarrow \mathbb{R} \text{ con } A \text{ sottoinsieme proprio di } \mathbb{R}, f \text{ derivabile } \forall x \in A.$$

Discuti la verità della seguente proposizione dando esauriente motivazione e riferendo almeno un esempio:

«condizione necessaria e sufficiente affinché f sia crescente (decrescente) su A è che risulti $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) $\forall x \in A$ ».

6 Dimostra la seguente formula: $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$.

7 Dimostra che la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}$$

è biettiva nell'intervallo $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Determina il campo di esistenza, il codominio e l'espressione analitica della funzione inversa.

8 È data la funzione $f(x)$ continua su tutto \mathbb{R} e della quale si sa che:

$$\int_0^1 f(x) dx = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Per quali valori reali di $k \neq 0$ è possibile calcolare l'integrale $\int_0^k f\left(\frac{x}{k}\right) dx$? Fornisci un esempio.

9 Dimostra la seguente proposizione:

«Se f è una funzione strettamente positiva, derivabile in tutto il suo dominio e tale che, $f'(x) = f(x) - [f(x)]^2$,

allora la funzione reciproca $f_1(x) = \frac{1}{f(x)}$ soddisfa la seguente relazione:

$$f_1'(x) + f_1(x) = 1».$$

Se eliminiamo l'ipotesi «strettamente positiva» la proposizione è ancora vera?

10 Dimostra che la funzione $y = x^4 - x - 1$ interseca l'asse delle ascisse in due punti.

SOLUZIONE DELLA SIMULAZIONE D'ESAME CORSO DI ORDINAMENTO

PROBLEMA 1

1. Riscriviamo le funzioni applicando le proprietà del logaritmo:

$$f_k(x) = \begin{cases} kx \ln x & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad k > 0; \quad g(x) = \begin{cases} x^2 \ln x & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}.$$

Tutte le funzioni date sono continue e derivabili per $x > 0$, con derivate:

$$f'_k(x) = k \ln x + k, \quad g'(x) = 2x \ln x + x \quad \text{quindi } f'_k(1) = k, \quad g'(1) = 1.$$

Perciò f_k e g hanno la stessa tangente in $x = 1$ se $f'_k(1) = g'(1)$, ossia se

$$k = 1.$$

2. Indichiamo con $f(x)$ la funzione $f_1(x)$ corrispondente a $k = 1$:

$$f(x) = \begin{cases} x \ln x & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0 \quad (\text{De L'Hospital}) \quad \text{pertanto } f \text{ è continua per } x = 0.$$

$$\lim_{b \rightarrow 0^+} \frac{f(0+b) - f(0)}{b} = \lim_{b \rightarrow 0^+} \frac{b \ln b - 0}{b} = \lim_{b \rightarrow 0^+} \ln b = -\infty.$$

La f non è derivabile in $x = 0$ nel senso che la derivata diverge negativamente quindi ha per tangente l'asse delle ordinate.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = 0, \quad \text{pertanto } g \text{ è continua in } x = 0.$$

$$\lim_{b \rightarrow 0^+} \frac{g(0+b) - g(0)}{b} = \lim_{b \rightarrow 0^+} \frac{b^2 \ln b - 0}{b} = \lim_{b \rightarrow 0^+} b \ln b = 0.$$

La g è derivabile in $x = 0$ e ha per tangente l'asse delle ascisse.

3. Studio di f e g .

Segno di f e intersezioni con gli assi:

$$\begin{aligned} x \ln x > 0 & \text{ per } x > 1 & \rightarrow f(x) < 0 & \text{ se } 0 < x < 1 \\ & & f(x) > 0 & \text{ se } x > 1 \\ & & f(1) & = 0. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \quad \rightarrow f \text{ non ha asintoti orizzontali né obliqui.}$$

Derivata prima: crescita e decrescenza,
massimi e minimi:

$$f'(x) = \ln x + 1 > 0 \text{ per } x > e^{-1} \quad \rightarrow f \text{ è crescente per } x > e^{-1}$$

$$f'(x) < 0 \text{ per } 0 < x < e^{-1} \quad \rightarrow f \text{ è decrescente per } 0 < x < e^{-1}$$

$A(e^{-1}; -e^{-1})$ minimo relativo e assoluto.

$$f''(x) = \frac{1}{x} > 0 \quad \forall x > 0 \quad \rightarrow \text{concavità verso l'alto.}$$

Segno di g e intersezioni con gli assi:

$$x^2 \ln x > 0 \text{ per } x > 1 \quad \rightarrow g(x) < 0 \text{ se } 0 < x < 1$$

$$g(x) > 0 \text{ se } x > 1$$

$$g(1) = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x = +\infty \quad \rightarrow g \text{ non ha asintoti orizzontali né obliqui.}$$

Derivata prima: crescita e decrescenza,
massimi e minimi:

$$g'(x) = x(2 \ln x + 1) > 0 \text{ per } x > e^{-\frac{1}{2}} \quad \rightarrow g \text{ è crescente per } x > e^{-\frac{1}{2}}$$

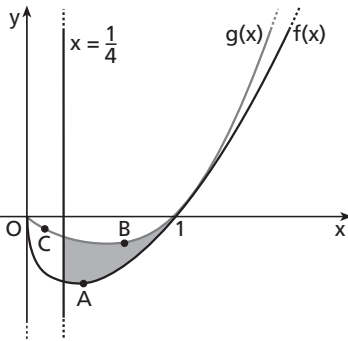
$$g'(x) < 0 \text{ per } 0 < x < e^{-\frac{1}{2}} \quad \rightarrow g \text{ è decrescente per } 0 < x < e^{-\frac{1}{2}}$$

$B\left(e^{-\frac{1}{2}}; -\frac{1}{2}e^{-1}\right)$ min. rel. e assoluto.

$$g''(x) = 2 \ln x + 3 > 0 \text{ per } x > e^{-\frac{3}{2}} \quad \rightarrow \text{concavità verso l'alto per } x > e^{-\frac{3}{2}}$$

$$\text{concavità verso il basso per } 0 < x < e^{-\frac{3}{2}}$$

$C\left(e^{-\frac{3}{2}}; -\frac{3}{2}e^{-3}\right)$ punto di flesso.



◀ Figura 1.

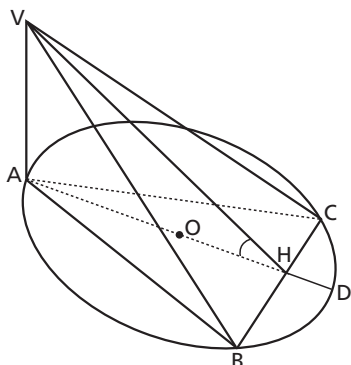
4. L'area richiesta è data dal seguente integrale che calcoleremo per parti:

$$\int_{\frac{1}{4}}^1 (x^2 \ln x - x \ln x) dx = \left[\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^2}{2} \ln x \right]_{\frac{1}{4}}^1 - \int_{\frac{1}{4}}^1 \left(\frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} - \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \right) dx =$$

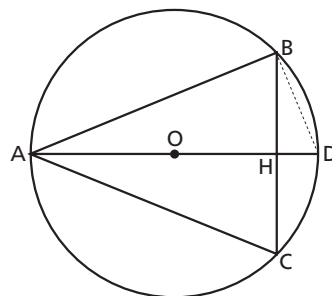
$$= \frac{1}{192} \ln 4 - \frac{1}{32} \ln 4 - \int_{\frac{1}{4}}^1 \left(\frac{x^2}{3} - \frac{x}{2} \right) dx = -\frac{5 \ln 4}{192} - \left[\frac{x^3}{9} - \frac{x^2}{4} \right]_{\frac{1}{4}}^1 = \dots = \frac{1}{8} - \frac{5 \ln 2}{96}.$$

PROBLEMA 2

1. Costruiamo la figura.



◀ Figura 2.



▲ Figura 3.

Il dominio geometrico della variabile $\overline{AH} = x$ è l'intervallo $0 \leq x \leq 2r$.

Scriviamo l'espressione del volume della piramide $ABCV$ tenendo conto che $\overline{AV} = \overline{BC} = 2\overline{BH}$:

$$V_p = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot \overline{AV} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{AH} \cdot \overline{AV} = \frac{1}{3} \cdot \overline{BH} \cdot \overline{AH} \cdot (2\overline{BH}) = \frac{2}{3} \cdot \overline{BH}^2 \cdot \overline{AH}.$$

Applichiamo il secondo teorema di Euclide al triangolo rettangolo ADB (inscritto in una semicirconferenza) per esprimere \overline{BH} in funzione di x :

$$\overline{BH}^2 = \overline{AH} \cdot \overline{HD}$$

$$\overline{AH} = x, \quad \overline{HD} = 2r - x \quad \rightarrow \quad \overline{BH}^2 = x(2r - x).$$

Ora scriviamo il volume della piramide in funzione di x :

$$V_p = f(x) = \frac{2}{3} x(2r - x)x = -\frac{2}{3} x^3 + \frac{4}{3} rx^2, \quad x \in [0; 2r].$$

2. Disegniamo il grafico eseguendo lo studio completo della funzione su tutto il suo campo di esistenza cioè $\forall x \in \mathbb{R}$.

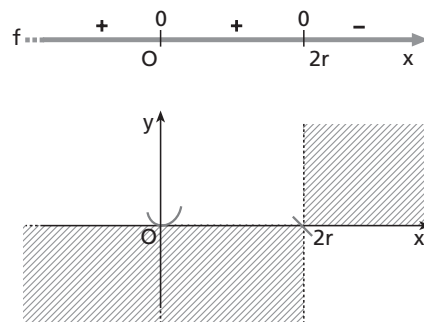
f è un polinomio di terzo grado quindi è continua e derivabile $\forall x \in \mathbb{R}$, non ha asintoti, ha un punto di flesso.

Segno e intersezioni con gli assi:

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3} x^2(2r - x) > 0, \quad x < 2r;$$

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3} x^2(2r - x) < 0, \quad x > 2r \wedge x \neq 0;$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \text{ (radice doppia) oppure } x = 2r.$$



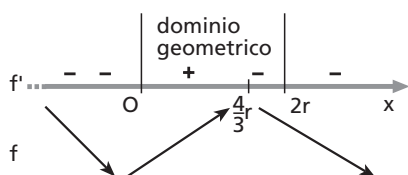
► Figura 4.

In $x=2r$ la funzione interseca l'asse delle ascisse. In $x=0$ la funzione è tangente all'asse delle ascisse perché ha una radice di molteplicità 2.

Derivata prima: crescita e decrescenza, massimi e minimi.

$$f'(x) = -2x^2 + \frac{8}{3}rx \quad \text{dunque:}$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0 \vee x > \frac{4}{3}r; \quad f'(x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{4}{3}r.$$



◀ Figura 5.

$O = (0; 0)$ è punto di minimo relativo;

$M = \left(\frac{4}{3}r; \frac{64}{81}r^3\right)$ è punto di massimo relativo.

Nell'intervallo $[0; 2r]$ la funzione, e quindi il volume della piramide, ha il massimo assoluto $y_0 = \frac{64}{81}r^3$ per $x_0 = \frac{4}{3}r$.

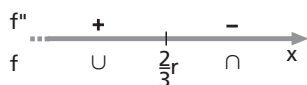
Completiamo lo studio con l'analisi della derivata seconda per la concavità e i flessi.

$$f''(x) = -4x + \frac{8}{3}r \quad \text{dunque:}$$

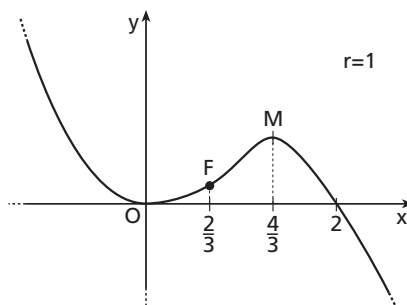
$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow x > \frac{2}{3}r, \quad \text{concavità verso il basso;}$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x < \frac{2}{3}r, \quad \text{concavità verso l'alto;}$$

$$F\left(\frac{2}{3}r; \frac{32}{81}r^3\right) \text{ punto di flesso.}$$



▲ Figura 6.



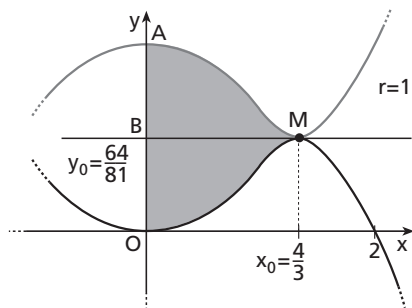
◀ Figura 7.

3. Le facce ABC e VBC formano un diedro convesso la cui sezione normale \widehat{VHA} è l'angolo richiesto. Determiniamo \widehat{VHA} mediante la sua tangente goniometrica:

$$\text{tg}(\widehat{VHA}) = \frac{\overline{AV}}{\overline{AH}}.$$

Poiché $\overline{AH} = x_0 = \frac{4}{3}r$ e $\overline{AV} = 2\overline{BH} = 2\sqrt{x_0(2r - x_0)} = \frac{4\sqrt{2}}{3}r$ avremo:
 $\text{tg}(\widehat{VHA}) = \sqrt{2}$ ($\widehat{VHA} \approx 57,735\dots^\circ$).

4. Tracciamo il grafico sommario della funzione simmetrica di f rispetto alla retta $y = y_0 = \frac{64}{81}r^3$ senza ricavare la sua espressione analitica.



◀ Figura 8.

L'area da determinare, evidenziata con un fondino, è doppia dell'area della regione di piano delimitata dalla retta $y = y_0$, dall'asse delle ordinate e dalla funzione f . Pertanto:

$$S_{OMA} = 2S_{OMB} = 2 \int_0^{\frac{4}{3}r} (y_0 - f(x)) dx = 2 \int_0^{\frac{4}{3}r} \frac{64}{81} r^3 dx - 2 \int_0^{\frac{4}{3}r} \left(-\frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{3}rx^2 \right) dx.$$

Calcoliamo i due integrali separatamente.

$$2 \int_0^{\frac{4}{3}r} \frac{64}{81} r^3 dx = \frac{128}{81} r^3 [x]_0^{\frac{4}{3}r} = \frac{512}{243} r^4.$$

$$2 \int_0^{\frac{4}{3}r} \left(-\frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{3}rx^2 \right) dx = -\frac{4}{3} \left[\frac{1}{4}x^4 \right]_0^{\frac{4}{3}r} + \frac{8}{3} r \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_0^{\frac{4}{3}r} = -\frac{256}{243} r^4 + \frac{512}{243} r^4 = \frac{256}{243} r^4.$$

Il valore dell'area è dunque:

$$S_{OMA} = \frac{512}{243} r^4 - \frac{256}{243} r^4 = \frac{256}{243} r^4.$$

■ QUESTIONARIO

1 Ricaviamo la y in funzione di x , quindi scriviamo le soluzioni dell'equazione:

$$y = \frac{6 - 3x}{5} \quad \rightarrow \quad \left(x; y = \frac{6 - 3x}{5} \right) \text{ con } x, y \in \mathbb{Z}.$$

y è un numero intero se il numeratore $6 - 3x = 3(2 - x)$ è multiplo di 5, ossia se

$$2 - x = 0, \pm 5, \pm 10, \pm 15, \dots = 5p \quad \rightarrow \quad x = 2 - 5p, \quad p \in \mathbb{Z}.$$

La soluzione dell'equazione è data dalle seguenti coppie ordinate di numeri interi:

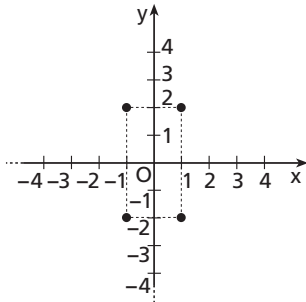
$$(x = 2 - 5p; y = 3p), \quad p \in \mathbb{Z}.$$

- 2** La funzione valore assoluto per definizione è non negativa quindi l'equazione $|x^2 - 1| + |4 - y^2| = 0$ è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} |x^2 - 1| = 0 \\ |4 - y^2| = 0 \end{cases}$$

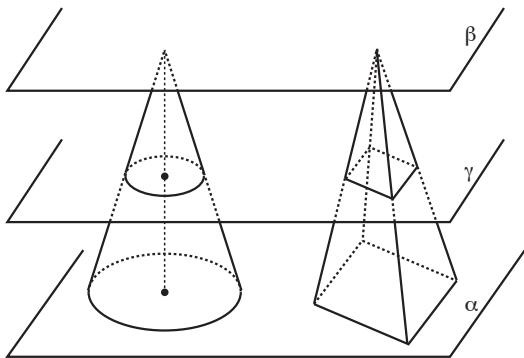
Le sue soluzioni sono:

$$\begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \pm 2 \end{cases} \quad \text{ossia i quattro punti } (1; \pm 2), (-1; \pm 2).$$



◀ **Figura 9.**

- 3** Disponiamo il cono e la piramide con le basi nello stesso piano α e i vertici nel medesimo semispazio. Poiché i due solidi hanno la stessa altezza, i vertici appartengono a uno stesso piano β parallelo ad α e ogni altro piano γ a essi parallelo e che intersechi uno dei due solidi interseca anche l'altro. Il cono e la piramide hanno basi equivalenti quindi, come conseguenza del teorema di Talete nello spazio, le sezioni intercettate da γ sono equivalenti perché equidistanti dai rispettivi vertici. Per il principio di Cavalieri i due solidi sono dunque equivalenti.



◀ **Figura 10.**

- 4** L'espressione generale della derivata prima della funzione incognita è data dall'integrale indefinito della sua derivata seconda:

$$y' = \int -5e^{-x} dx = 5e^{-x} + k_1.$$

La derivata prima della funzione richiesta è quella che soddisfa la condizione:

$$5e^{-0} + k_1 = 5 \rightarrow k_1 = 0 \quad \text{quindi} \quad y' = 5e^{-x}.$$

In modo simile determiniamo l'espressione generale della funzione incognita:

$$y = \int 5e^{-x} dx = -5e^{-x} + k_2.$$

In particolare, dovendo essere soddisfatta la condizione $y(1) = 5 - \frac{5}{e}$, avremo:

$$-5e^{-x} + k_2 = 5 - \frac{5}{e} \rightarrow k_2 = 5 \text{ quindi } y = 5(1 - e^{-x}).$$

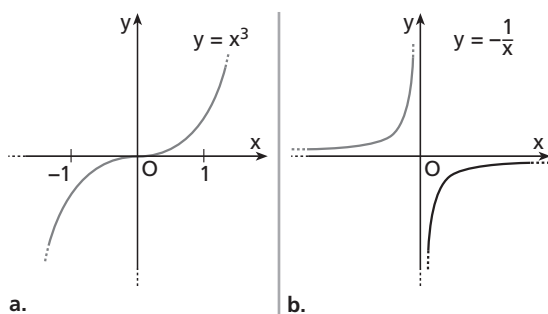
5 Una funzione $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ si dice crescente su A se $\forall x_1, x_2 \in A$, con $x_1 < x_2$, si ha $f(x_1) < f(x_2)$.

La funzione f , derivabile in A , può essere crescente su A e avere derivata nulla in qualche punto. Per esempio la funzione $f(x) = x^3$, $x \in [-1; 1]$, è crescente sull'intervallo $[-1; 1]$ ma $f'(0) = 0$ (figura 11.a). Pertanto la condizione $f'(x) > 0 \forall x \in A$ non è necessaria.

Se la derivata di f è positiva $\forall x \in A$ può tuttavia accadere che $f(x_1) > f(x_2)$ per qualche $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2$.

Per esempio la funzione $f(x) = -\frac{1}{x}$, $x \in (\mathbb{R} - \{0\})$, è derivabile in tutto il dominio però $f(-1) > f(1)$ pur essendo $-1 < 1$ (figura 11.b). Questa funzione è crescente nei due sottoinsiemi disgiunti \mathbb{R}^- ed \mathbb{R}^+ ma non su $(\mathbb{R} - \{0\})$. Pertanto la condizione $f'(x) > 0 \forall x \in A$ non è sufficiente.

La proposizione è dunque falsa.



◀ **Figura 11.**

6 $\binom{n}{k}$, per $k = 1, 2, \dots, n$, è il numero delle combinazioni semplici di n elementi distinti di classe k ed è anche il generico coefficiente dello sviluppo di $(a + b)^n$, ossia:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Basta dunque scegliere $a = b = 1$ per ottenere:

$$(1 + 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k \rightarrow 2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \quad \text{c.v.d.}$$

7 La funzione data è continua (il denominatore non ha radici reali ed è positivo $\forall x \in \mathbb{R}$) e derivabile su \mathbb{R} . Dallo studio della sua derivata prima

$$f'(x) = -\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$$

otteniamo:

$$x < -\frac{1}{2} \rightarrow f'(x) > 0 \text{ e } f \text{ crescente;}$$

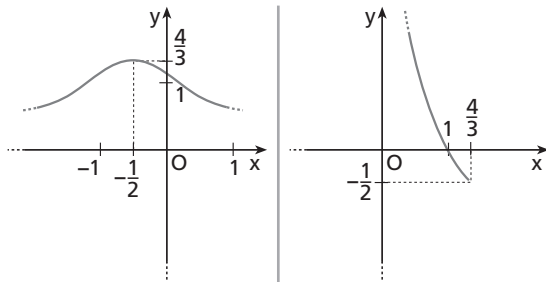
$$x > -\frac{1}{2} \rightarrow f'(x) < 0 \text{ e } f \text{ decrescente;}$$

$$x = -\frac{1}{2} \rightarrow f'\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \text{ e } M\left(-\frac{1}{2}; \frac{4}{3}\right) \text{ max rel. e ass.}$$

Nell'intervallo $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$ la funzione è monotona decrescente e quindi è biettiva e perciò invertibile (figura 12.a).

Questo intervallo è anche il codominio della funzione inversa.

Poiché in tale intervallo la f è strettamente positiva e $\frac{4}{3}$ è il massimo assoluto, l'intervallo $\left]0; \frac{4}{3}\right]$ è il codominio di f e quindi il dominio della sua inversa f^{-1} (figura 12.b).



a. La funzione f .

b. La funzione inversa di f .

◀ **Figura 12.**

Per determinare l'espressione analitica di f^{-1} poniamo $y = f(x)$ e risolviamo l'equazione ottenuta rispetto alla variabile x :

$$\begin{cases} y = \frac{1}{x^2 + x + 1} \\ x \in \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[; y \in \left]0; \frac{4}{3}\right] \end{cases} \rightarrow \begin{cases} yx^2 + yx + y - 1 = 0 \\ \dots; \dots \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4}{y} - 3} \\ \dots; \dots \end{cases}$$

Scegliamo la soluzione con «+», compatibile con la condizione $x \geq -\frac{1}{2}$ e scambiamo le due variabili per ottenere l'espressione analitica di f^{-1} :

$$y = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4}{x} - 3}.$$

8 Calcoliamo l'integrale incognito col metodo della sostituzione:

$$\frac{x}{k} = t \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ t = 0 \end{cases}, \begin{cases} x = k \\ t = 1 \end{cases}, dx = k dt, \text{ pertanto}$$

$$\int_0^k f\left(\frac{x}{k}\right) dx = k \int_0^1 f(t) dt = k\alpha, \forall k \neq 0.$$

Un esempio semplice è il seguente:

$$\int_0^1 (x - x^2) dx = \frac{1}{6}; \quad k=3 \rightarrow \int_0^3 \left(\frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} \right) dx = \left[\frac{x^2}{6} - \frac{x^3}{27} \right]_0^3 = \dots = \frac{1}{2} = 3 \int_0^1 (x - x^2) dx.$$

9 Dalle ipotesi su f deduciamo immediatamente che f_1 esiste per tutti i punti del dominio di f ; inoltre:

$$f_1'(x) = -\frac{1}{[f(x)]^2} f'(x).$$

Pertanto, poiché per ipotesi è $f'(x) = f(x) - [f(x)]^2$, si ha:

$$f_1'(x) + f_1(x) = -\frac{f(x) - [f(x)]^2}{[f(x)]^2} + \frac{1}{f(x)} = -\frac{1}{f(x)} + 1 + \frac{1}{f(x)} = 1 \quad \text{c.v.d.}$$

Se eliminiamo l'ipotesi «strettamente positiva» la proposizione non è vera perché la funzione f_1 non esiste per quegli x tali che $f(x) = 0$. Naturalmente la proposizione rimane valida se la funzione data è strettamente negativa.

10 La funzione è continua e derivabile in \mathbb{R} e non ha radici razionali. Osserviamo che:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = +\infty$$

$$y' = 4x^3 - 1 \quad \rightarrow \quad \text{per } x < \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \quad y \text{ è strettamente decrescente}$$

$$\text{per } x > \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \quad y \text{ è strettamente crescente}$$

$$\text{per } x = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \quad y = \frac{1}{4\sqrt[3]{4}} - \frac{1}{\sqrt[3]{4}} - 1 < 0 \text{ è il minimo assoluto.}$$

Per il teorema di esistenza degli zeri la funzione si annulla in due punti soltanto.

Il primo è compreso fra -1 e 0 perché $y(-1) = 1$ e $y(0) = -1$.

Il secondo è compreso fra 1 e 2 perché $y(1) = -1$ e $y(2) = 13$.

Per esercitarti ancora sugli argomenti trattati nel	Svolgi il
Problema 1	<ul style="list-style-type: none"> • Problema 26 pag. W 140 • Problema 11 pag. V 91 • Problema 12 pag. S 183
Problema 2	<ul style="list-style-type: none"> • Problema 23 pag. V 285 • Esercizio 252 pag. W 121
Quesito 2	<ul style="list-style-type: none"> • Esercizio 384 pag. S 70 • Esercizio 391 pag. S 70
Quesito 3	<ul style="list-style-type: none"> • Teorema delle sezioni parallele di un angoloide pag. π 24 • Esercizio 105 pag. π 83 • Esercizio 106 pag. π 83
Quesito 4	<ul style="list-style-type: none"> • Problema 18 pag. W 71
Quesito 5	<ul style="list-style-type: none"> • Quesito 1 pag. V 288
Quesito 6	<ul style="list-style-type: none"> • Quesito 10 pag. W 177
Quesito 7	<ul style="list-style-type: none"> • Esercizio 114 pag. V 125
Quesito 8	<ul style="list-style-type: none"> • Quesito 4 pag. W 151
Quesito 10	<ul style="list-style-type: none"> • Quesito 6 pag. V 136